Física IV

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE

PELOTAS

Difração

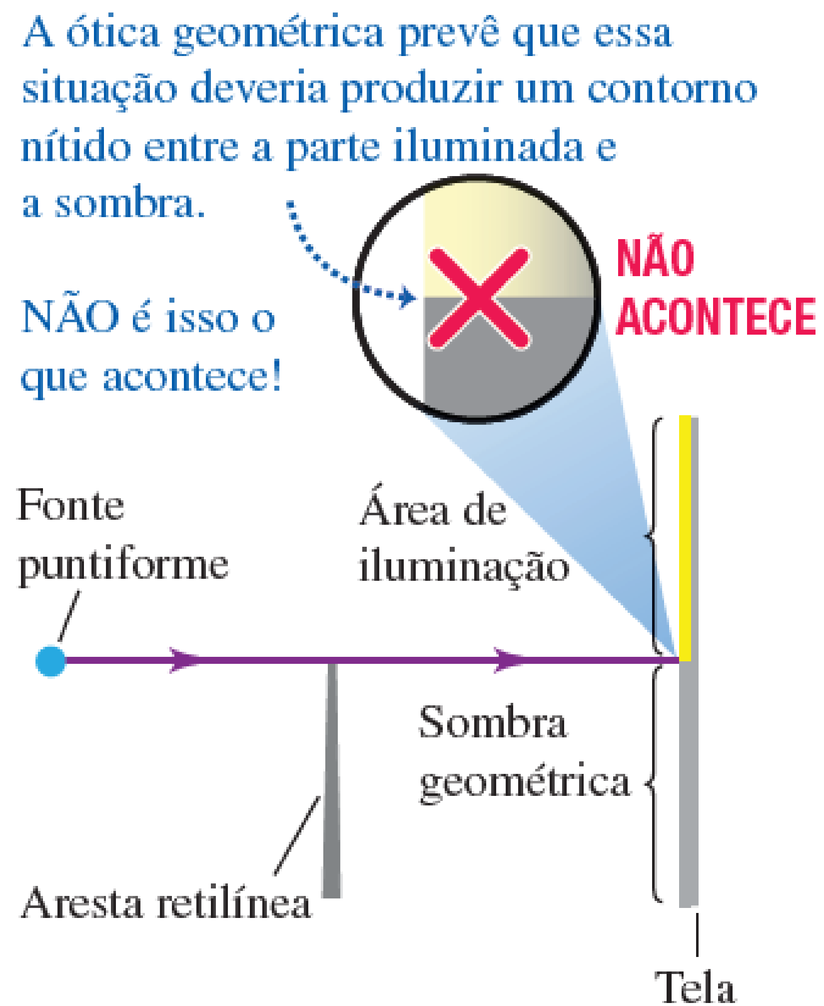
Sears – capítulo 36

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

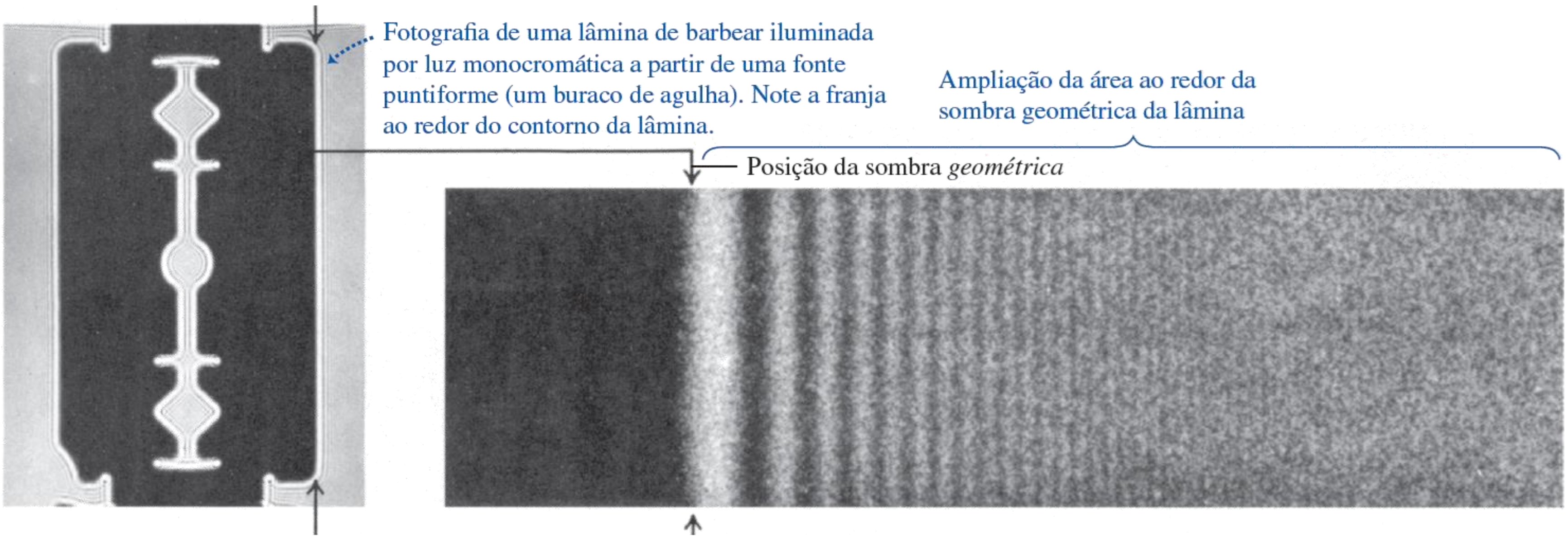
- De acordo com a ótica geométrica, quando um objeto opaco é colocado entre uma fonte luminosa puntiforme e uma tela, a sombra formada pelo objeto forma um nítido contorno retilíneo.

- Nenhuma luz atinge a região da sombra, e a área fora dela é iluminada continuamente.

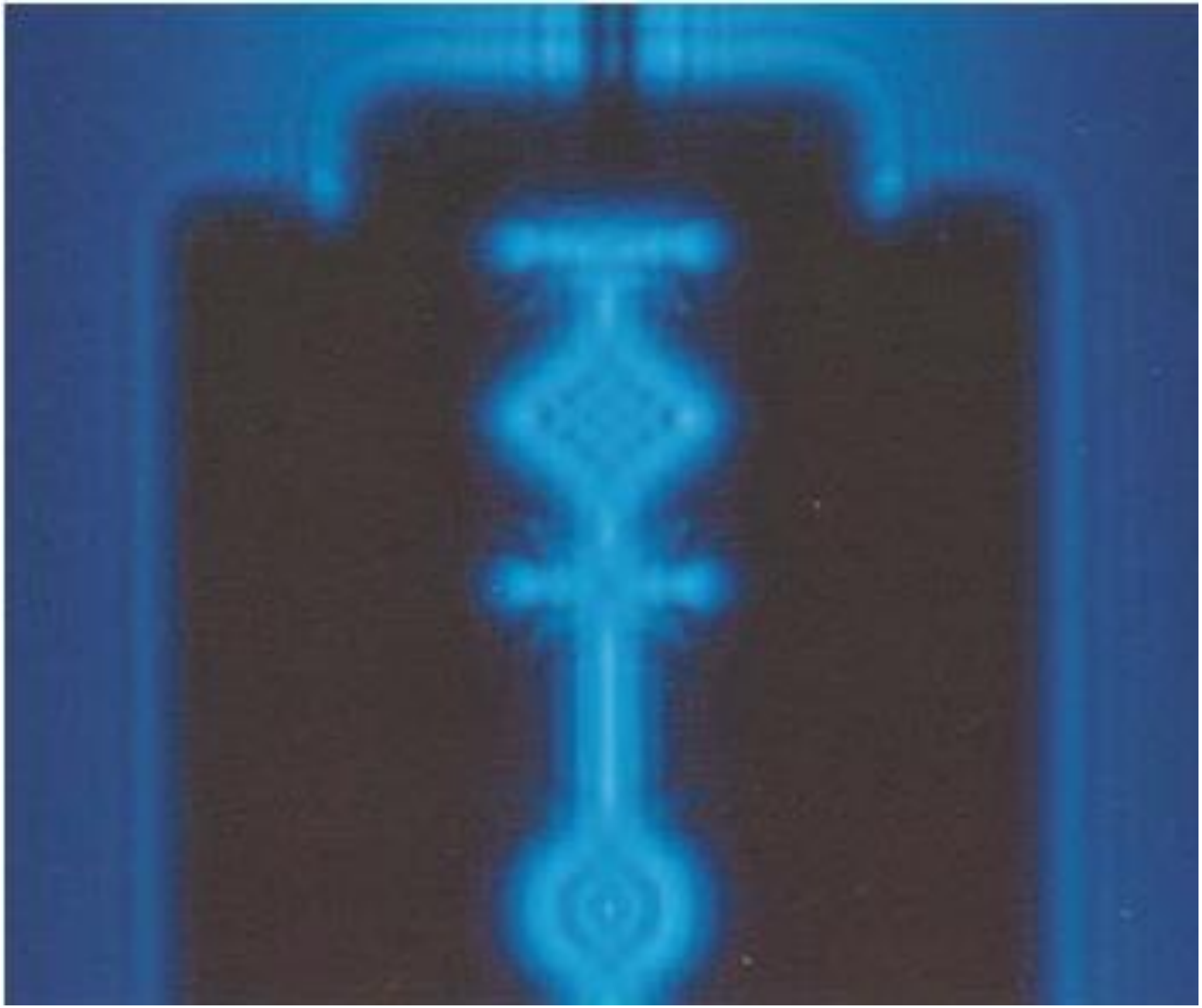


Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

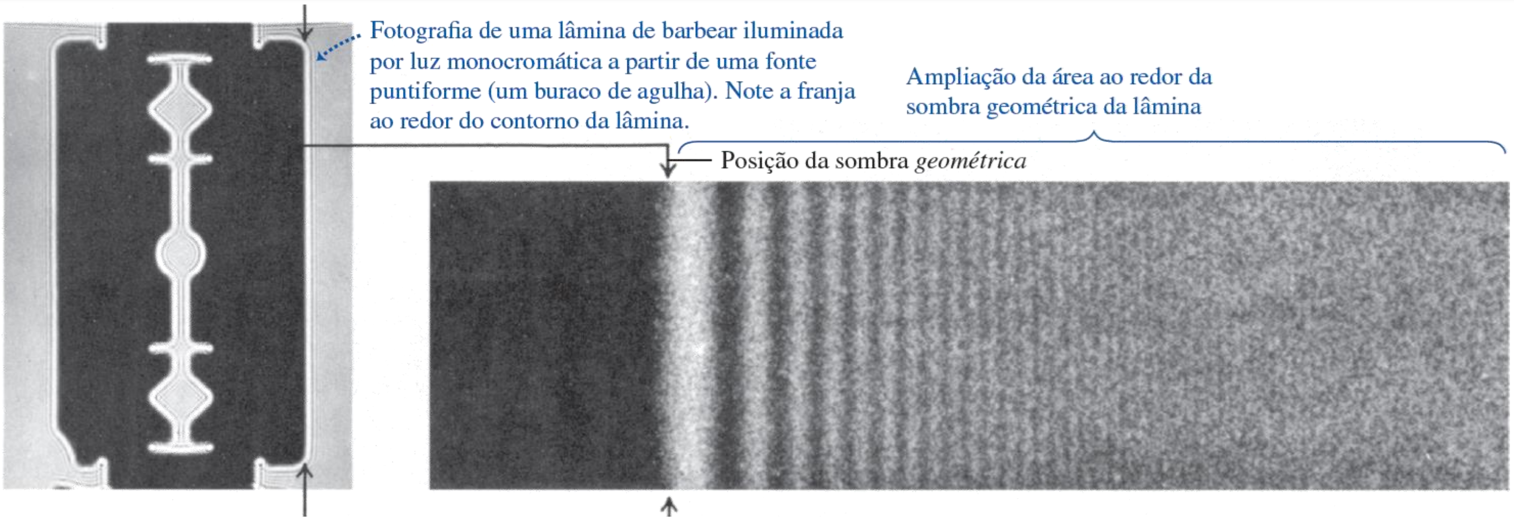
- No entanto, a natureza ondulatória da luz produz efeitos que **não** podem ser entendidos com o modelo simples da ótica geométrica.
- Uma classe importante desses efeitos ocorre quando a luz atinge um obstáculo que apresenta uma abertura ou uma extremidade.
- As figuras de interferência que se formam em decorrência desses efeitos são estudadas com a designação geral de **difração**.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz



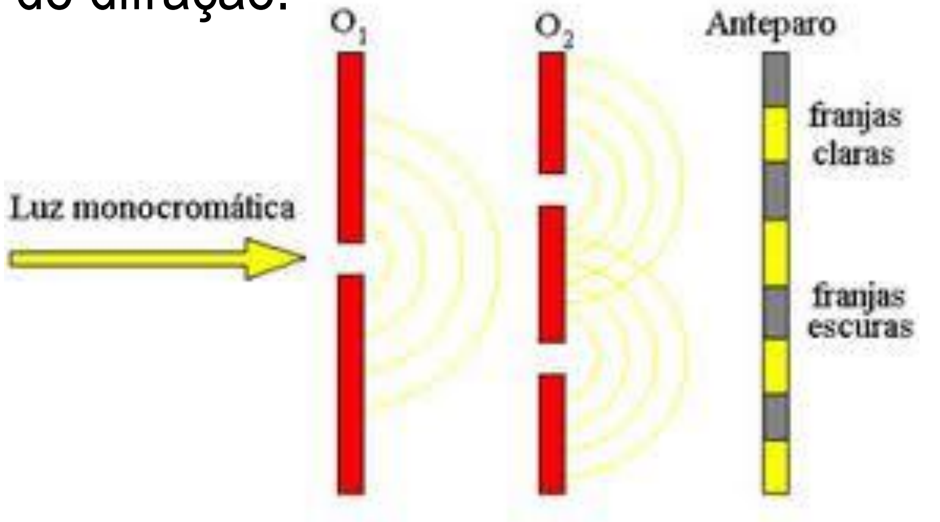
- Na região próxima a essa aresta, a área do lado esquerdo apresenta uma sucessão de franjas brilhantes e escuras.
- Embora não apareça com nitidez na fotografia, também existe um pouco de luz na região da sombra.
- A primeira franja brilhante que surge logo do lado esquerdo do limite da sombra apresenta um brilho maior que o da extremidade esquerda da área iluminada.

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

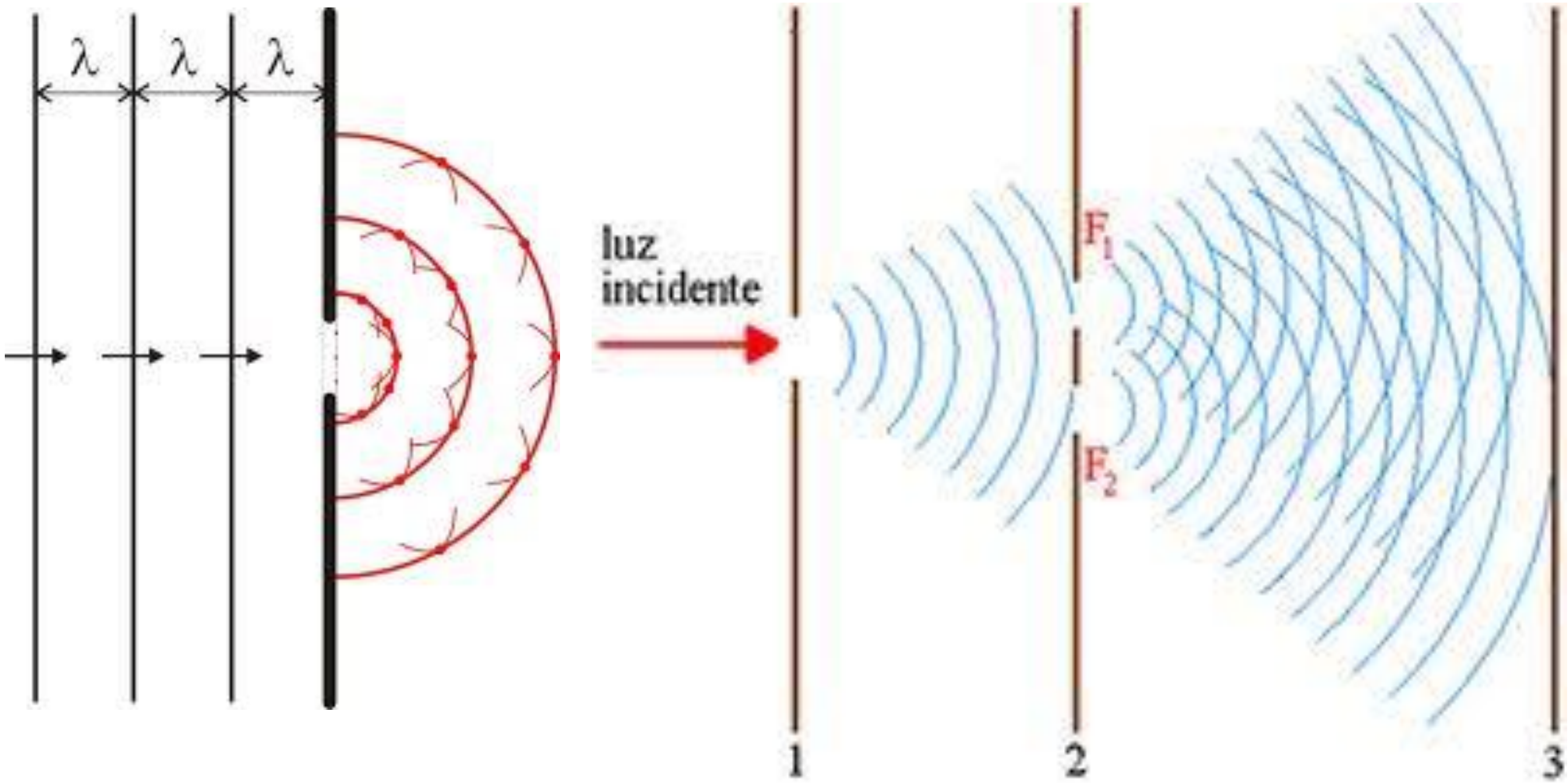
- Essa experiência simples fornece uma ideia da riqueza e da complexidade da difração.
- Em geral, na vida cotidiana não observamos figuras de difração porque a maioria das fontes de luz não é monocromática nem puntiforme.
- Se usássemos a luz branca proveniente de uma lâmpada comum em vez da fonte puntiforme usada para obter a fotografia da Figura da lâmina, cada comprimento de onda da luz proveniente de cada ponto da lâmpada formaria sua própria figura de difração; porém, em virtude da superposição de todas essas figuras, não poderíamos ver nenhuma figura de difração individual.

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

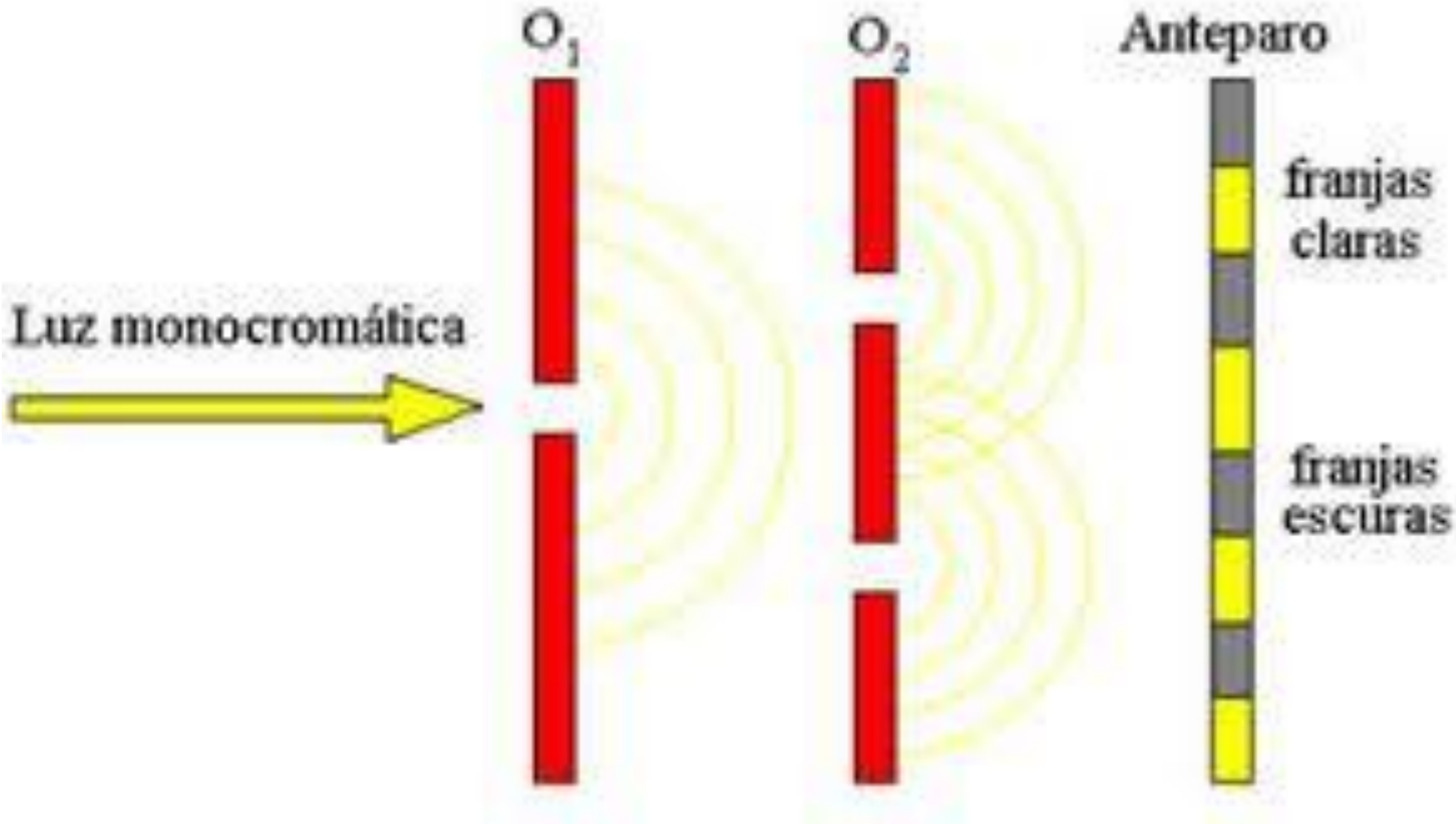
- A difração é um fenômeno essencialmente ondulatório, ou seja, acontece apenas porque a luz é uma onda e é observado também em outros tipos de onda.
- A difração pode ser definida, sem muito rigor, como o alargamento sofrido por um feixe luminoso ao passar por uma fenda estreita. Algo mais acontece, porém, já que a difração, além de alargar um feixe luminoso, produz uma série de franjas claras e escuras que constituem a chamada figura de difração.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração de Fresnel e difração de Fraunhofer

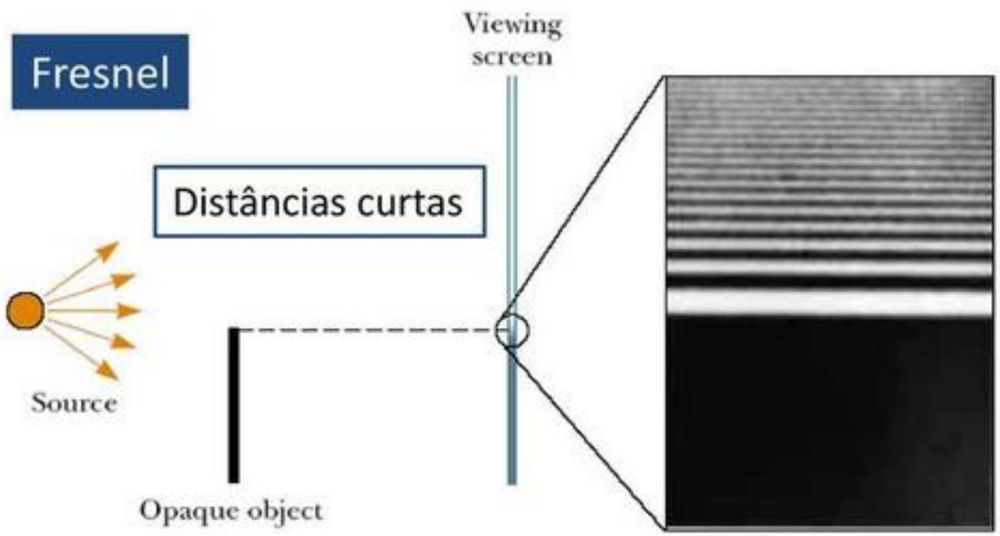
- **Difração de Fresnel** ou difração de campo próximo: tanto a fonte quanto a tela estão relativamente próximas do obstáculo que produz a figura de difração.

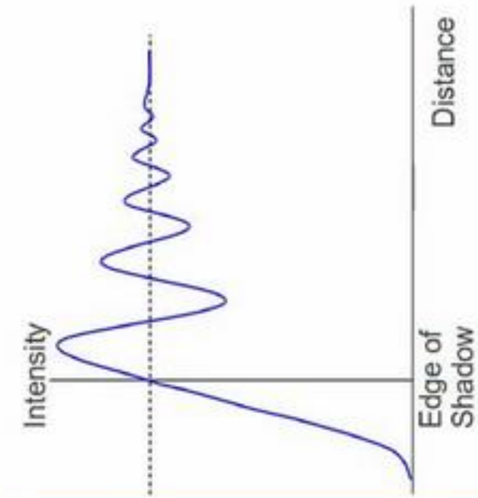
- **Difração de Fraunhofer**: quando as distâncias entre a fonte, o obstáculo e a tela são suficientemente grandes para que todas as retas que ligam a fonte com o obstáculo possam ser consideradas paralelas e para que todas as retas que ligam pontos do obstáculo com pontos da tela possam ser consideradas paralelas.

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

Fresnel

Distâncias curtas

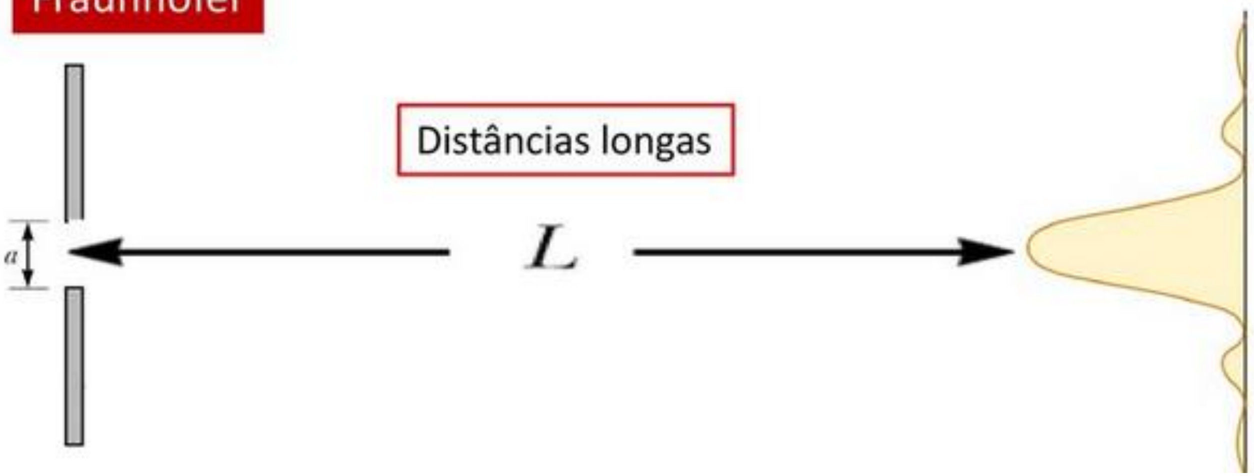




A intensidade nos mínimos não é nula

Fraunhofer

Distâncias longas



Mínimos com intensidade nula

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- As ondas luminosas são desviadas ao passarem pela superfície de uma esfera, produzindo um ponto claro no centro da sombra da esfera, conhecido como **Ponto Claro de Fresnel**.

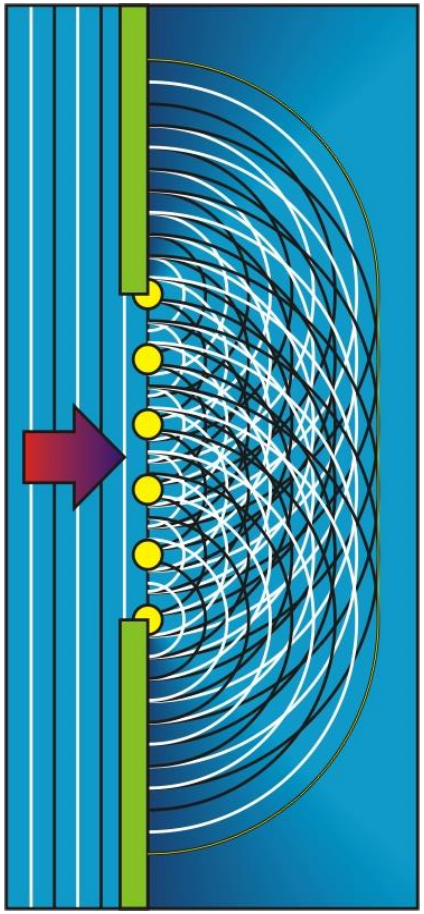
Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração e princípio de Huygens

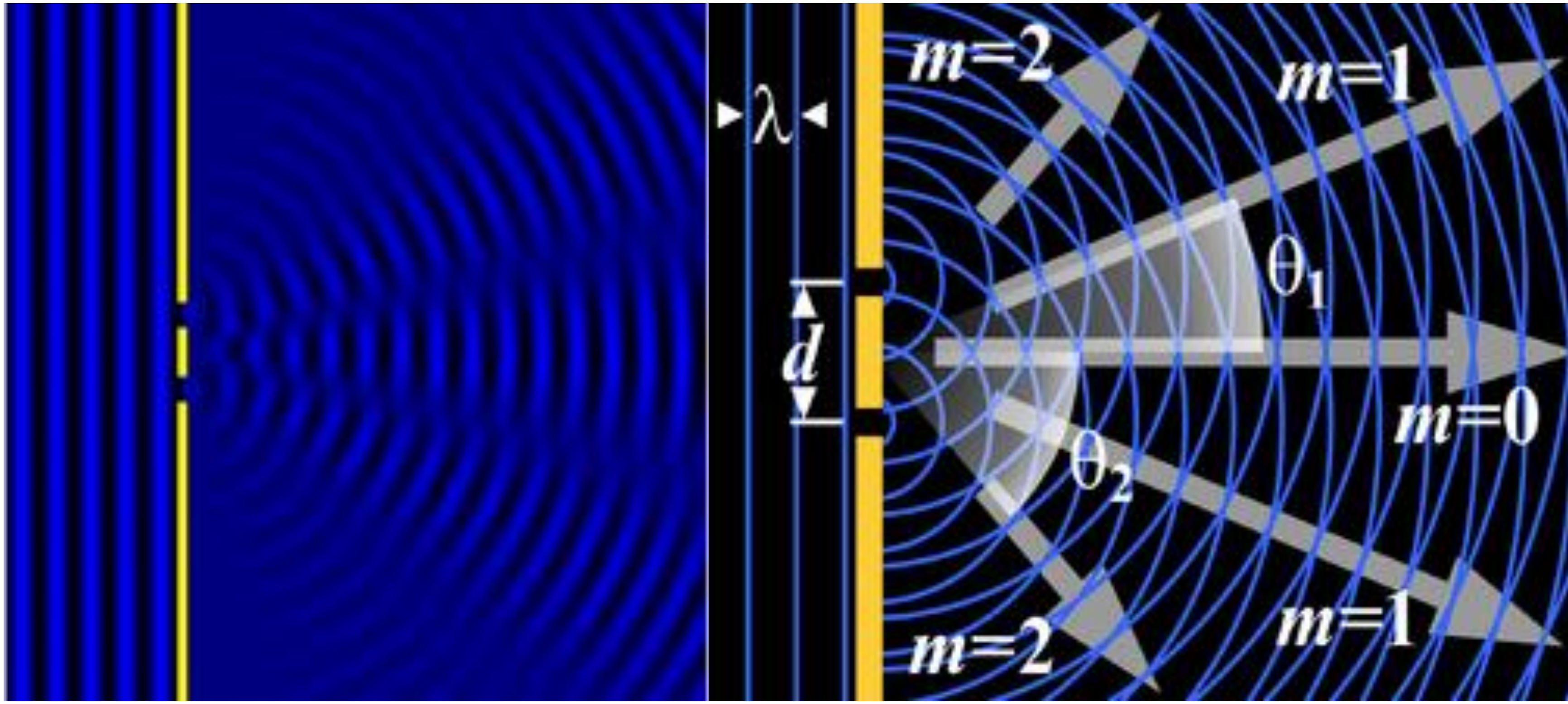
- **Princípio de Huygens**: afirma que podemos considerar cada ponto de uma frente de onda como fonte de uma onda secundária que se espalha em todas as direções com velocidade igual à velocidade de propagação da onda nesse meio.

- A posição da frente de onda em cada instante posterior é dada pelo envoltório das frentes de onda no instante considerado.

- Para determinar o deslocamento em um dado ponto, usamos o princípio da superposição para combinar todos os deslocamentos individuais produzidos por essas ondas secundárias.



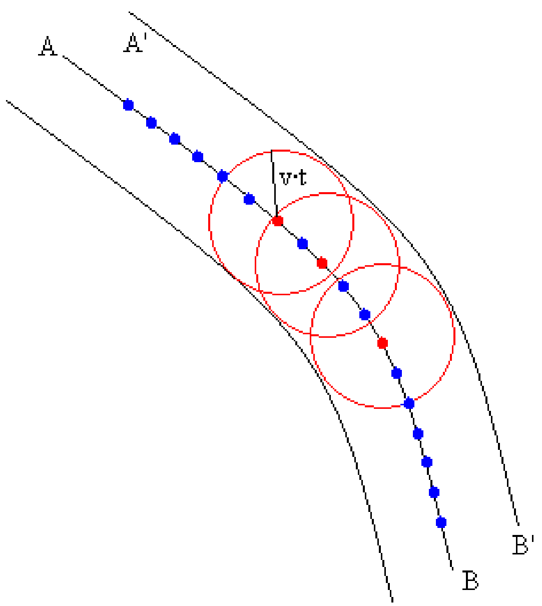
Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

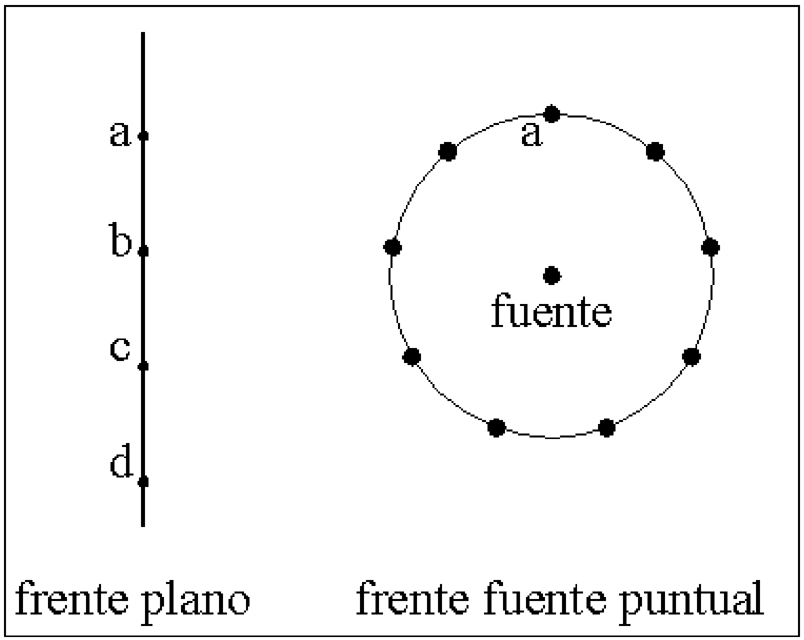


Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração e princípio de Huygens

Huygens: "(...) cada partícula do meio através do qual a onda evolui não só transmite o seu movimento à partícula seguinte, ao, longo da reta que parte do ponto luminoso, mas também a todas as partículas que a rodeiam e que se opõem ao movimento. O resultado é uma onda em torno de cada partícula e que a tem como centro".

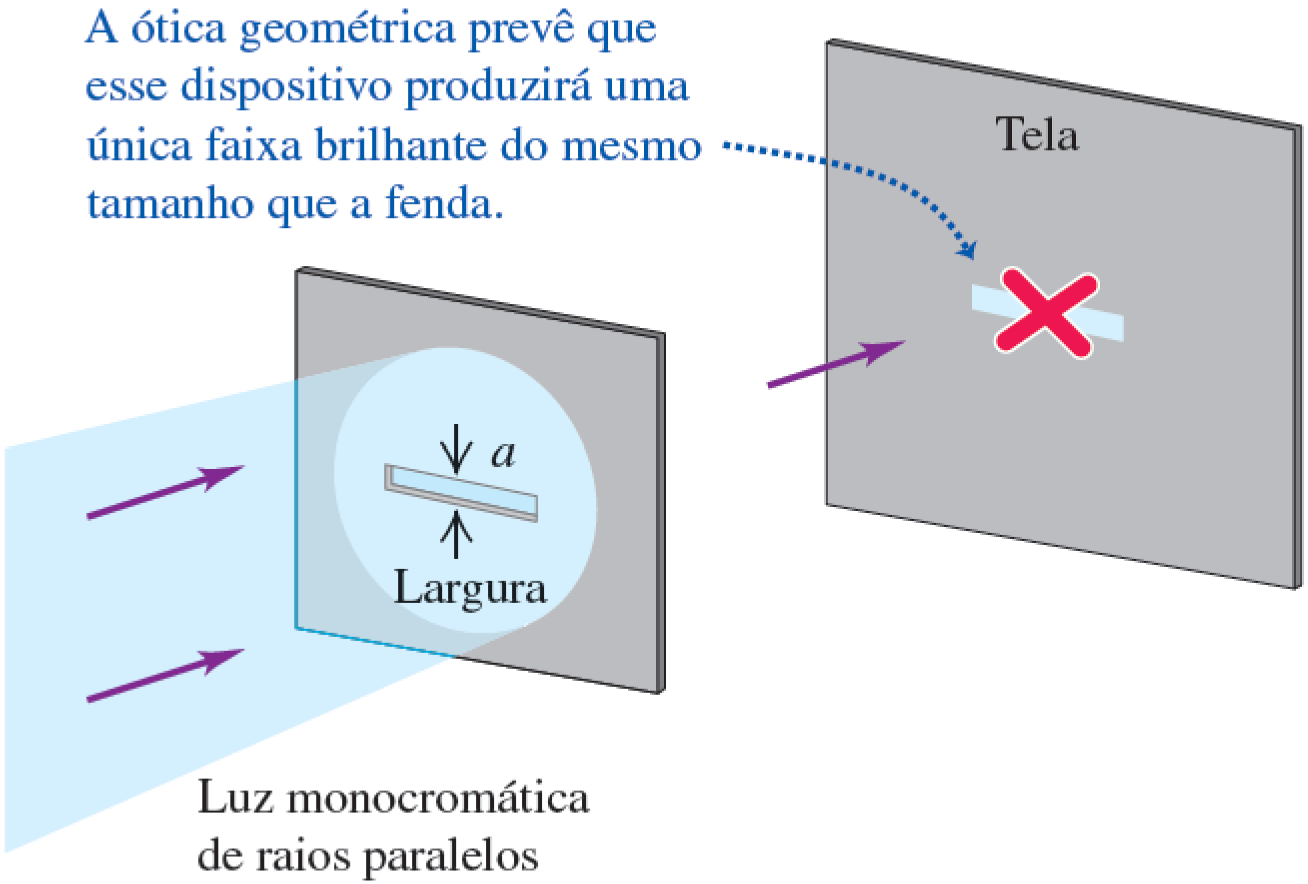




Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração produzida por uma fenda simples

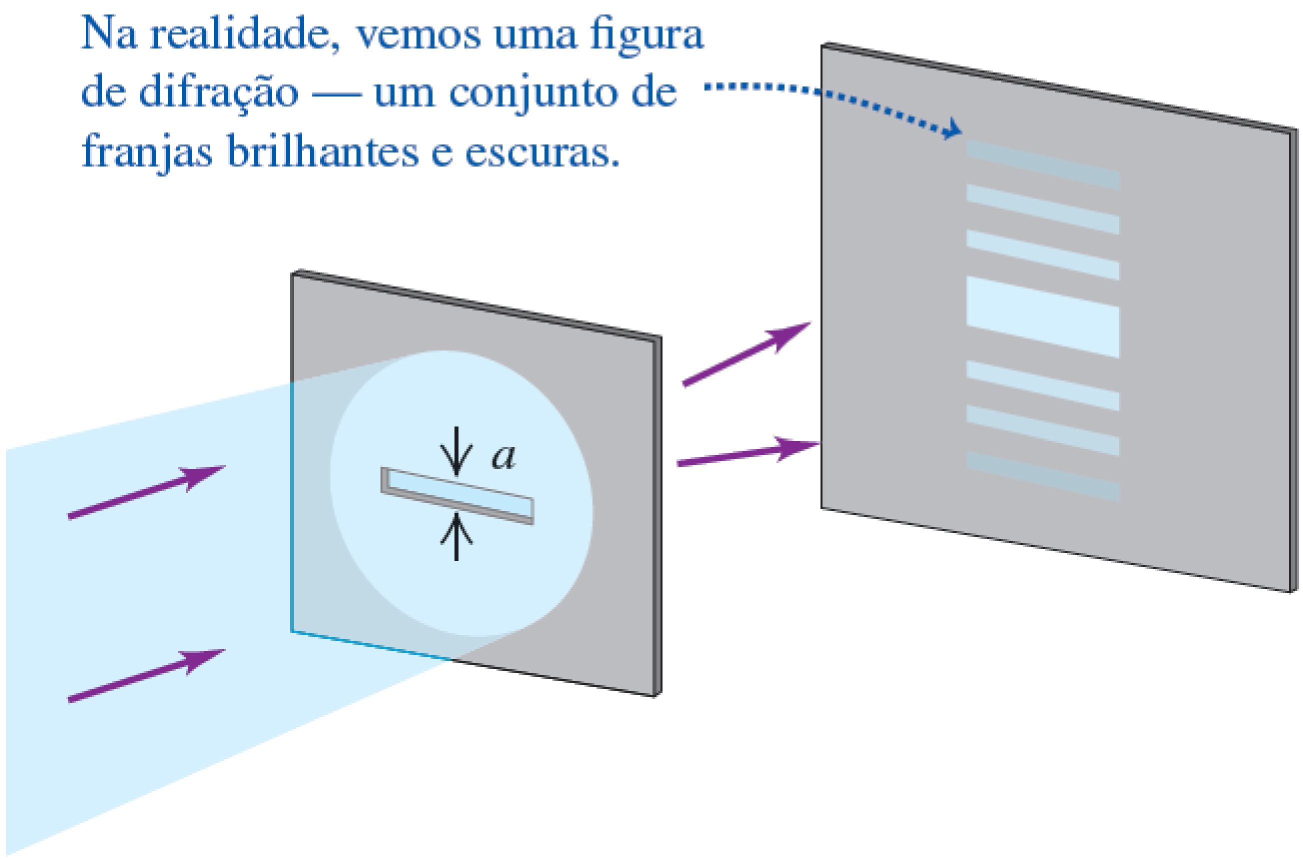
- Resultado previsto pela óptica geométrica:



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

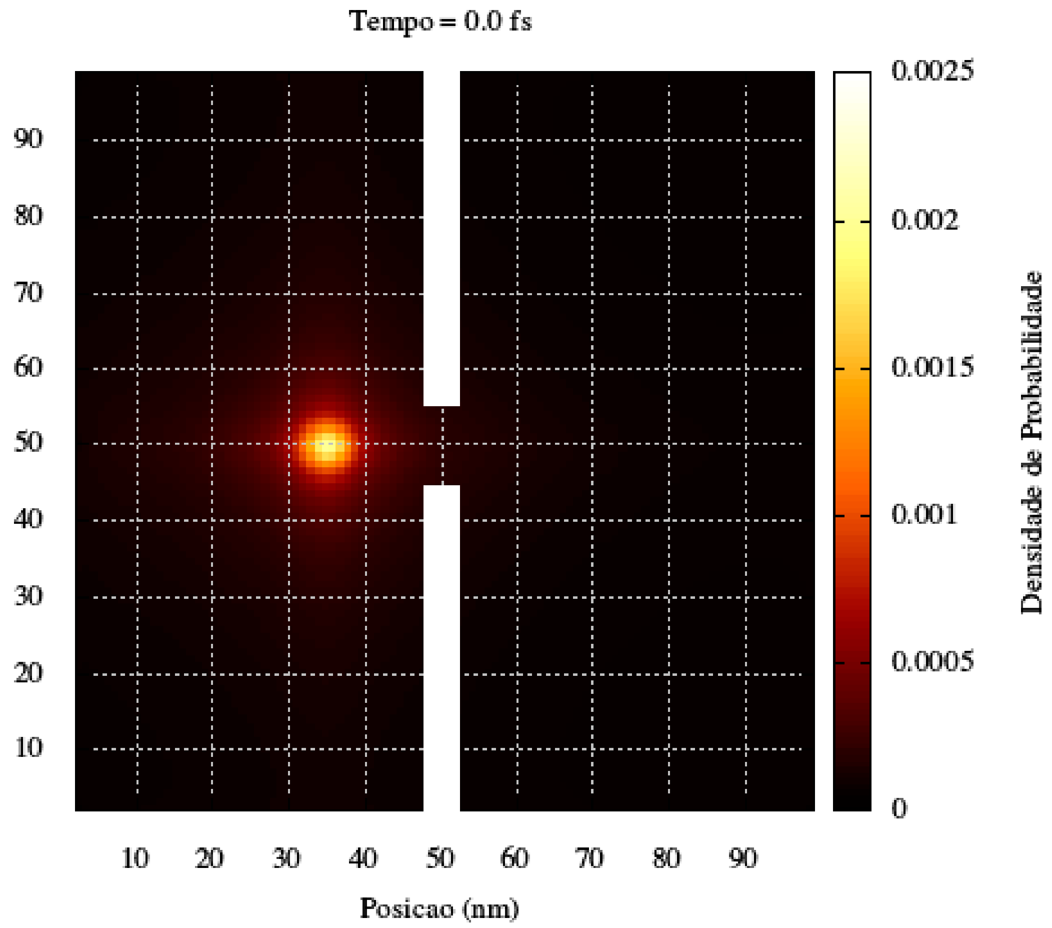
➢ Difração produzida por uma fenda simples

- O que realmente acontece:



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração produzida por uma fenda simples



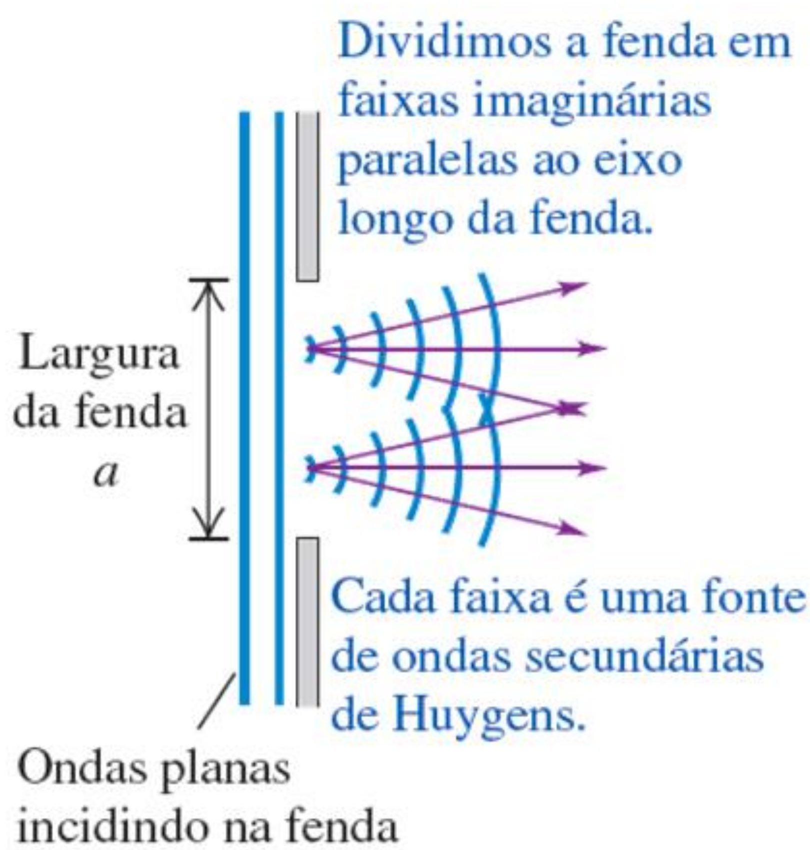
Evolução temporal de um pacote de ondas de matéria (pacote gaussiano) ao incidir sobre uma fenda única. A animação foi construída a partir da solução numérica da equação de Schrödinger dependente do tempo. Observe que há a formação de um máximo central (como esperado).

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração produzida em uma fenda simples: localizando as franjas escuras

- De acordo com o princípio de Huygens, cada elemento de área da abertura da fenda pode ser considerado uma fonte de ondas secundárias.

- Em particular, suponha que a fenda seja dividida em diversas faixas estreitas de mesma largura, paralelas ao comprimento da fenda e perpendiculares ao plano da página.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração produzida em uma fenda simples: localizando as franjas escuras

- De acordo com o princípio de Huygens, cada elemento de área da abertura da fenda pode ser considerado uma fonte de ondas secundárias.

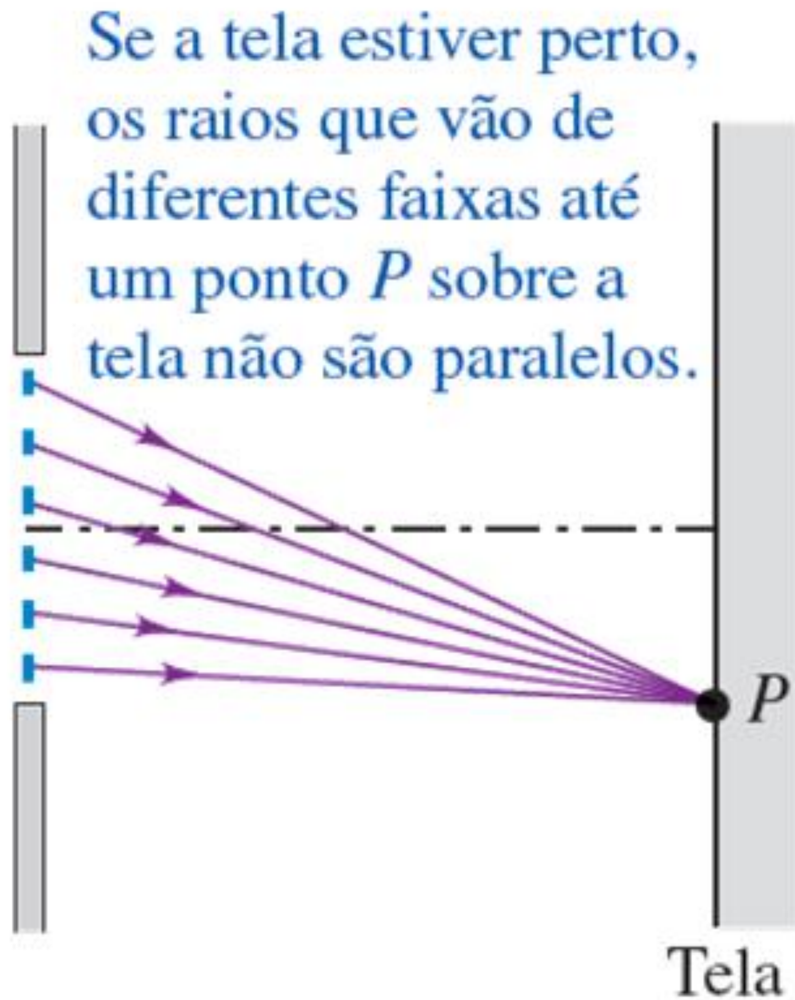
- Em particular, suponha que a fenda seja dividida em diversas faixas estreitas de mesma largura, paralelas ao comprimento da fenda e perpendiculares ao plano da página.

- Na Figura 36.4a mostramos apenas duas dessas faixas. Frentes de ondas secundárias cilíndricas, mostradas na figura em seção reta, se espalham a partir de cada faixa.

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

Difração de Fresnel

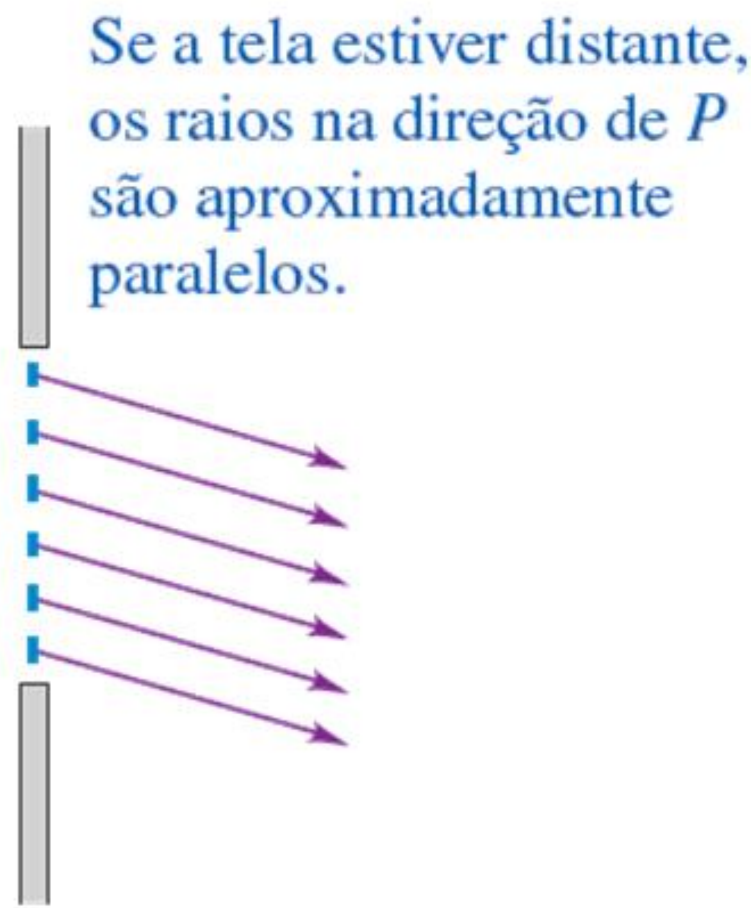
- Na Figura, uma tela é colocada do lado direito da fenda.
- Podemos calcular a intensidade resultante em um ponto **P** sobre a tela somando as contribuições das ondas secundárias individuais, levando em consideração suas diversas fases e amplitudes.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

➢ Difração de Fraunhofer

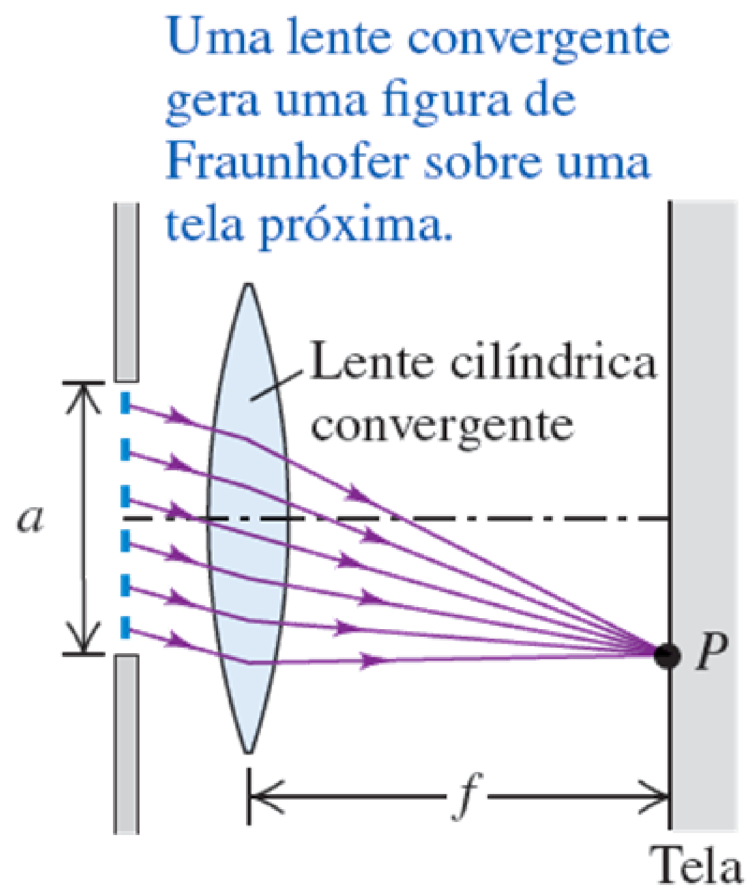
- É mais fácil fazer esse cálculo quando supomos que a distância entre a tela e a fenda é suficientemente grande, de modo que os raios provenientes da fenda e que atingem o ponto **P** possam ser considerados paralelos.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

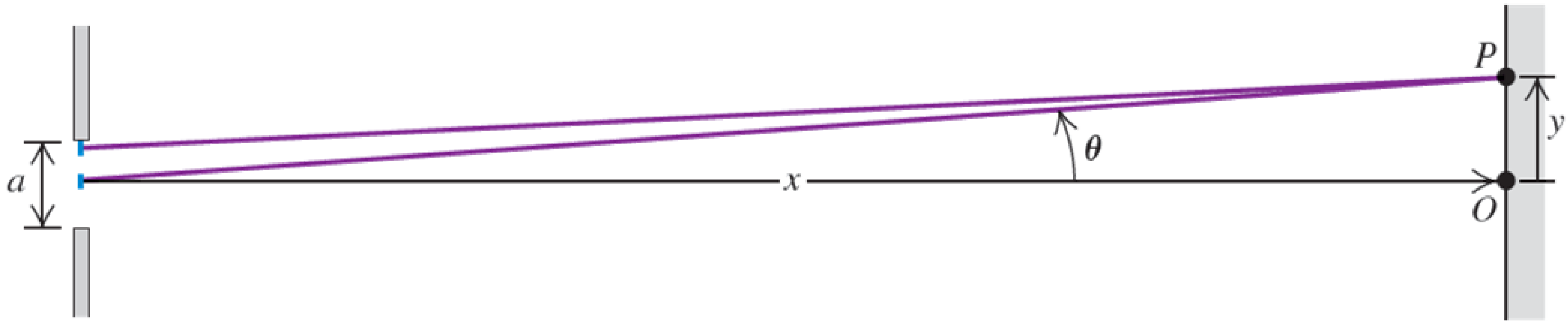
- Uma situação equivalente pode ser observada quando os raios que incidem sobre a lente são paralelos e a lente forma sobre a tela uma imagem reduzida da figura de difração que se formaria sobre uma tela a uma distância infinita da fenda na ausência da lente.
- Você poderia pensar que os diversos caminhos da luz através da lente introduziriam diferenças de fase adicionais, mas, na realidade, podemos demonstrar que todos esses caminhos produzem deslocamentos de fase iguais, então isso não representa nenhum problema.

Imagem de uma difração de Fraunhofer

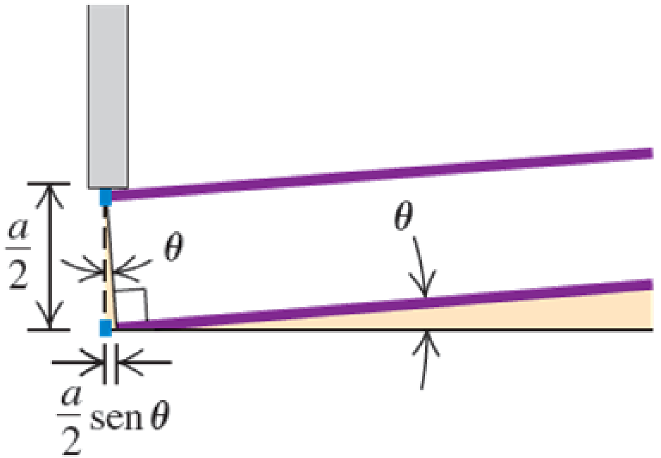


Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

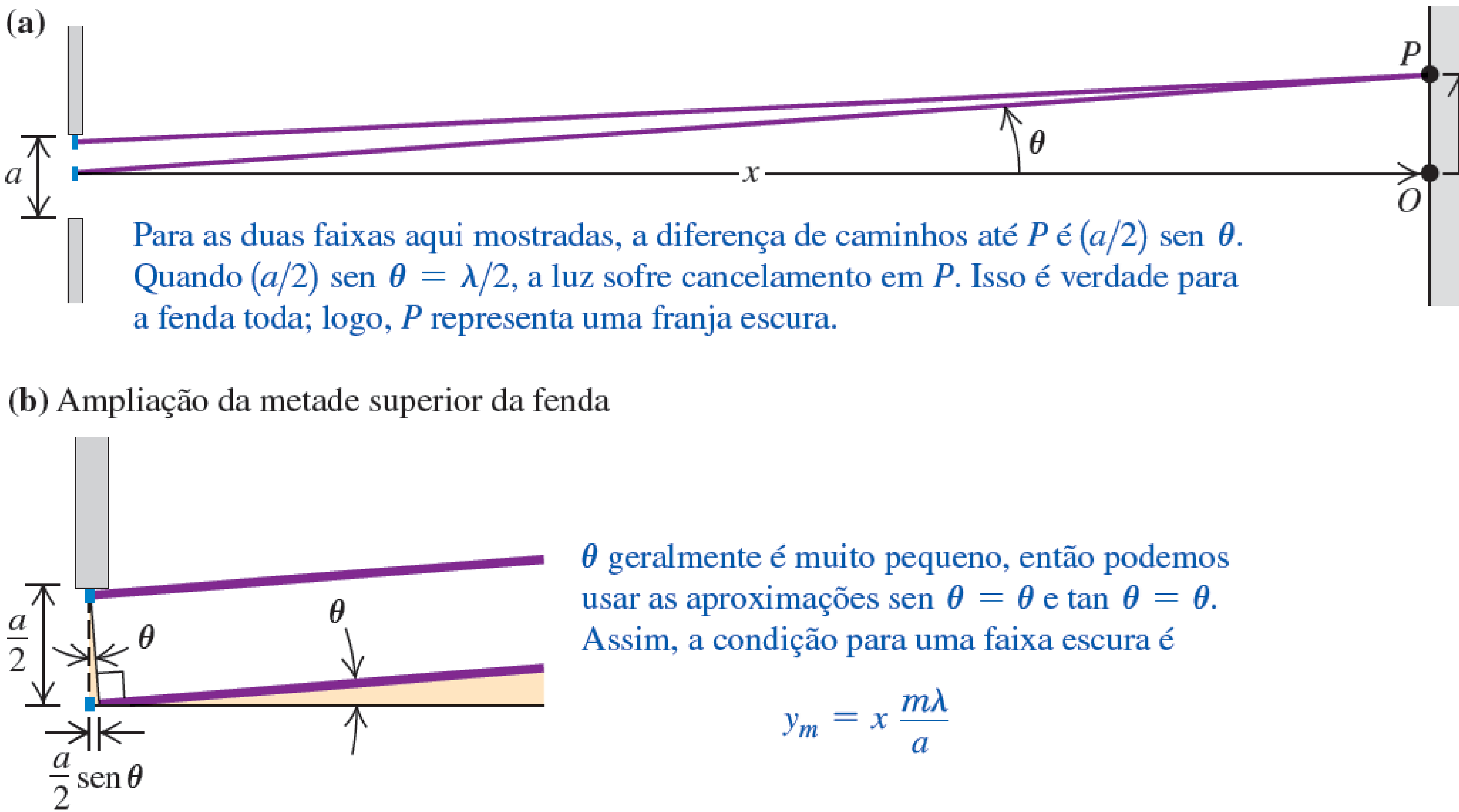
- Consideramos duas pequenas faixas, uma limitada por um raio logo abaixo da extremidade superior da fenda e outra começando em seu centro, como mostrado na Figura.



- Ampliando a fenda

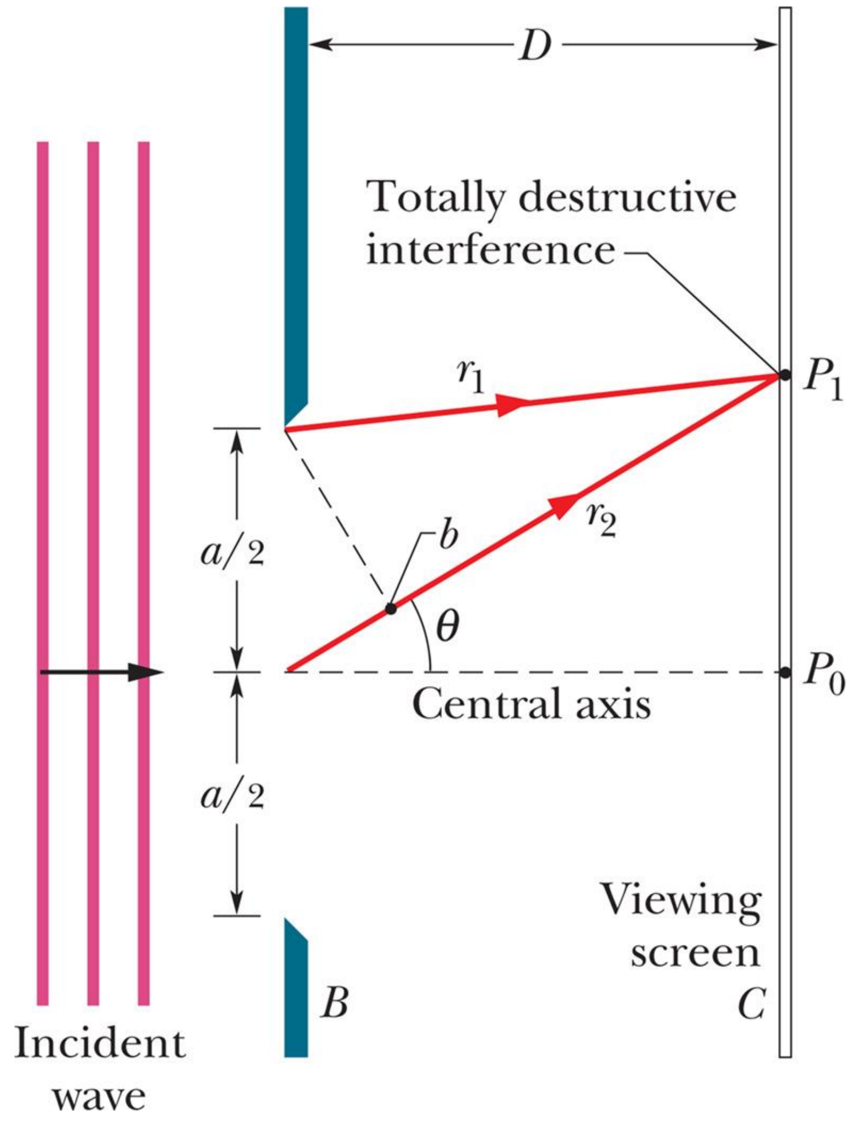


Difração e a Teoria Ondulatória da Luz



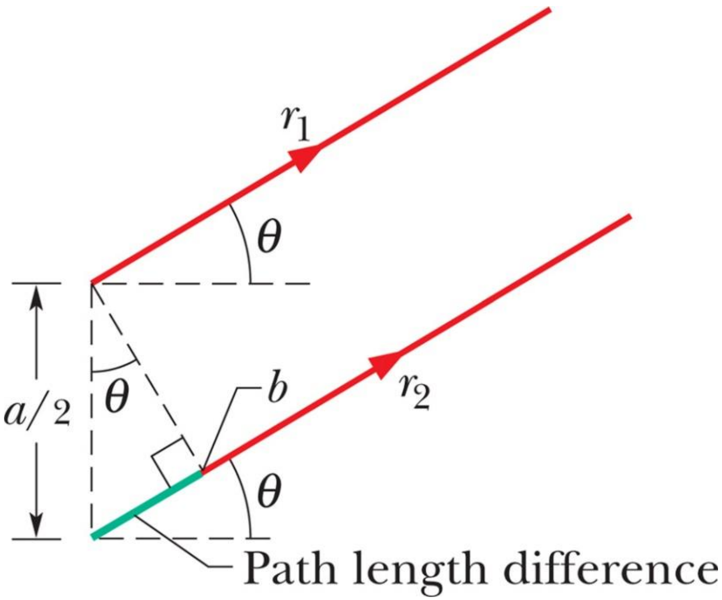
Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- Em primeiro lugar, dividimos mentalmente a fenda em duas regiões de mesma largura a/2. Em seguida, estendemos até P_1 um raio luminoso r_1 proveniente da extremidade superior da região de cima e um raio luminoso r_2 proveniente da extremidade superior da região de baixo. Para que haja interferência destrutiva no ponto P_1, devemos ter



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- Como $D \gg a$, podemos considerar os raios paralelos



$$\Delta L = r_1 - r_2 \rightarrow Diferença\ de\ caminho$$

$$\sin\theta = \frac{\Delta L}{\frac{a}{2}} \rightarrow \Delta L = \frac{a}{2}\sin\theta$$

$$\boxed{r_1 - r_2 = \frac{a}{2}\sin\theta}$$

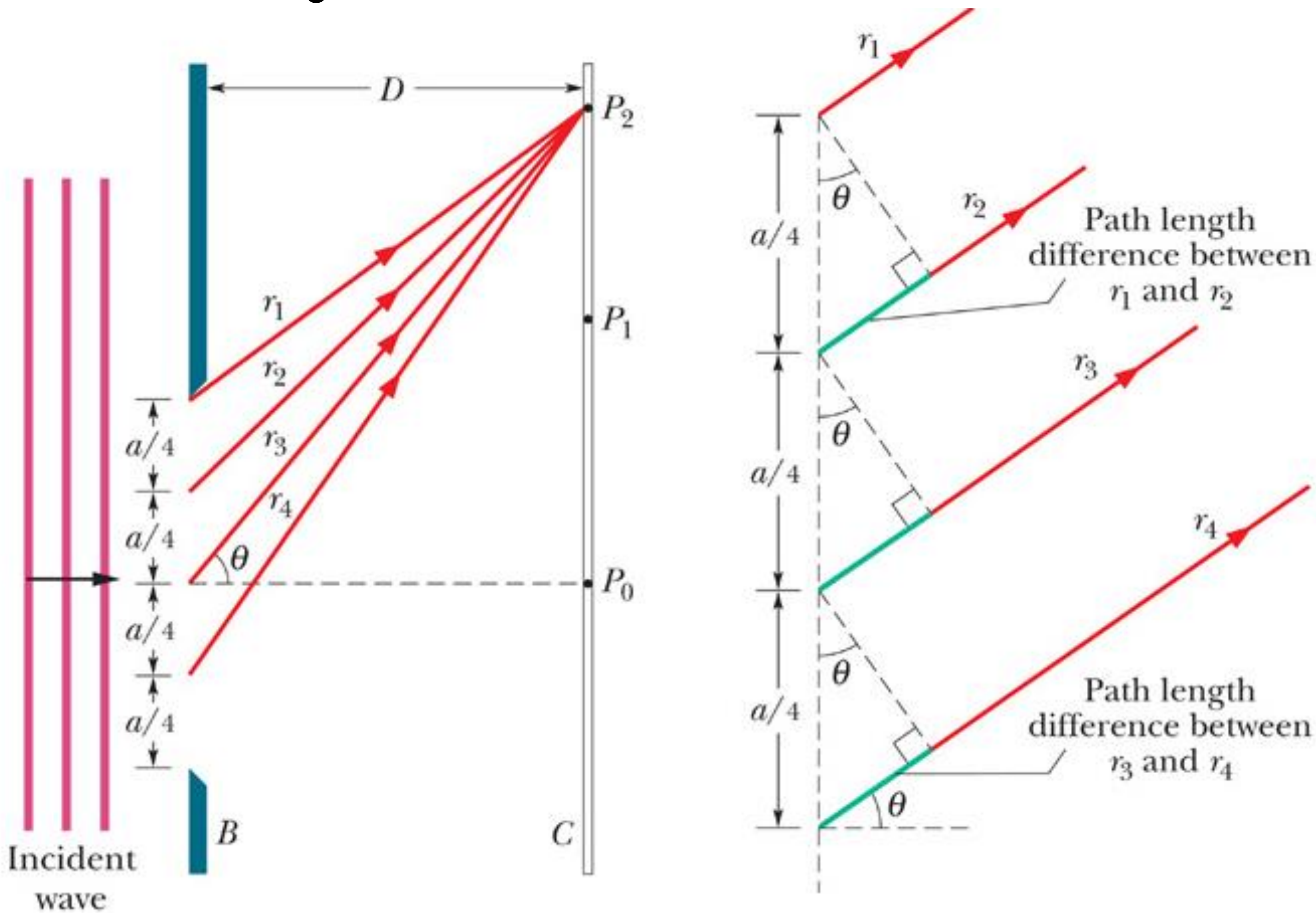
- Para interferência destrutiva a diferença de caminho deve ser $\frac{\lambda}{2}$

$$r_1 - r_2 = \frac{a}{2}\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a\sin\theta = \pm\lambda \rightarrow \ \ pineiro\ mínimo}$$

- O sinal mais ou menos ($\pm$) afirma que existem franjas escuras simétricas acima e abaixo do ponto O

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- A posição da segunda franja escura pode ser determinada da mesma forma, exceto pelo fato de que, agora, dividimos a fenda em quatro regiões de mesma largura.



Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- Para interferência destrutiva na segunda franja, a diferença de caminho deve ser

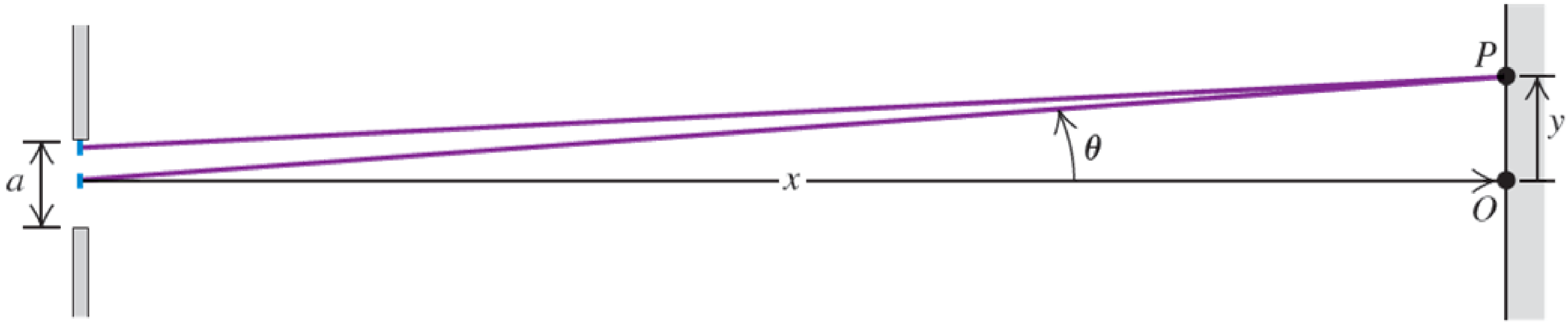
$$r_1 - r_2 = \frac{a}{4}\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a\sin\theta = \pm 2\lambda \rightarrow \quad segundo\ mínimo}$$

- Mínimos (franjas escuras): Poderíamos ficar calculando as posições das franjas escuras dividindo a fenda em número cada vez maior de regiões. Podemos observar que as posições das franjas escuras acima ou abaixo do eixo central são dadas pela equação geral:

$$\boxed{a\sin\theta = \pm m\lambda \rightarrow \quad para\ m = 1, 2, 3, \ldots}$$

Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- Portanto, os valores de θ pequenos, vamos considerar a aproximação



$$a \sin\theta = m\lambda \rightarrow \sin\theta \approx \theta \rightarrow a \cdot \theta = m\lambda \rightarrow \theta = \frac{m\lambda}{a}$$ (θ em radianos)

$$sen\theta \approx tan\theta \approx \theta = \frac{y}{x}$$

$$a\ sen\theta = m\lambda \rightarrow a\frac{y}{x} = m\lambda \rightarrow y = x\frac{m\lambda}{a}$$

$$\boxed{y_m = x\frac{m\lambda}{a}} \quad (y_m \ll x)$$

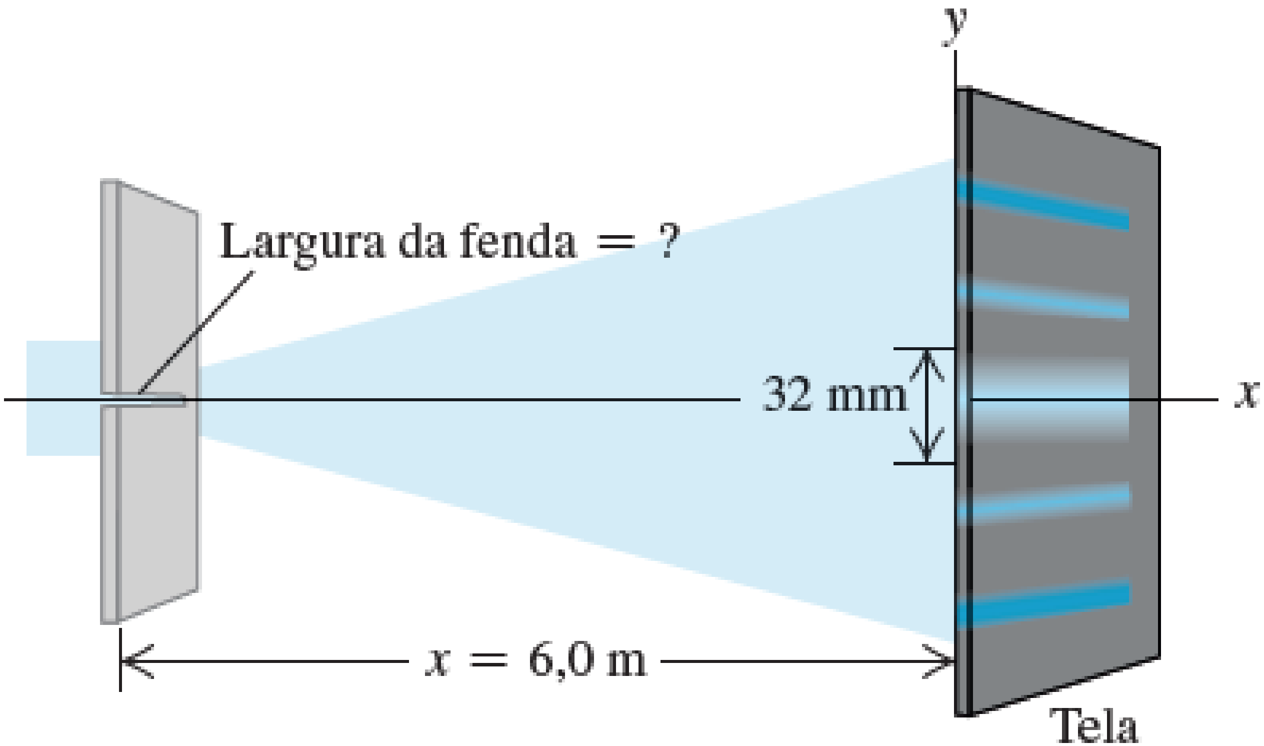
Difração e a Teoria Ondulatória da Luz

- **Atenção**:

Difração produzida em uma fenda simples versus interferência produzida em uma fenda dupla a Equação $\boldsymbol{y_m = x\frac{m\lambda}{a}}$ tem a mesma forma da Equação $\boldsymbol{y_m = R\frac{m\lambda}{a}}$ (capítulo anterior) referente à figura de interferência de uma fenda dupla, exceto que, na primeira, x é usado no lugar de R para designar a distância entre a tela e a fenda. Entretanto, a $\boldsymbol{y_m = x\frac{m\lambda}{a}}$ fornece a posição das franjas escuras na experiência da fenda única, ao passo que a equação$\boldsymbol{y_m = R\frac{m\lambda}{a}}$ fornece a posição das franjas brilhantes na experiência da fenda dupla. Além disso, $m = 0$ na Equação $\theta = \frac{m\lambda}{a}$ não corresponde a uma franja escura. Preste atenção!

Difração de fenda simples

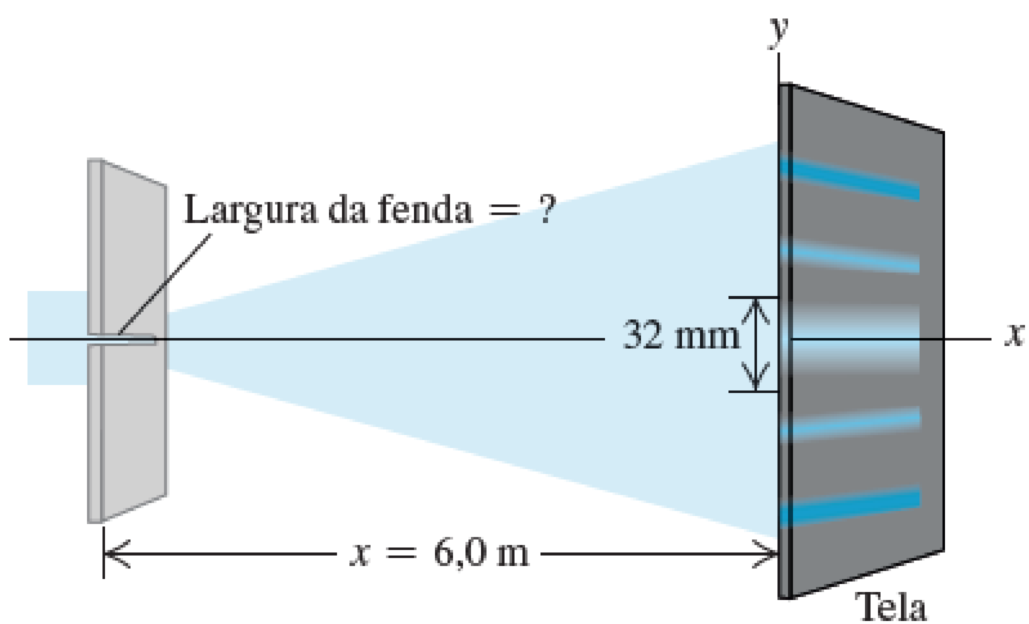
Exemplo 1 - Você faz um feixe de luz laser de 633 nm incidir sobre uma fenda estrita e observa a figura de difração sobre uma tela situada a uma distância de 6,0 m. Você verifica que é de 32 mm a distância entre o centro do primeiro mínimo central e o centro do primeiro mínimo abaixo do máximo central. Qual a largura da fenda?

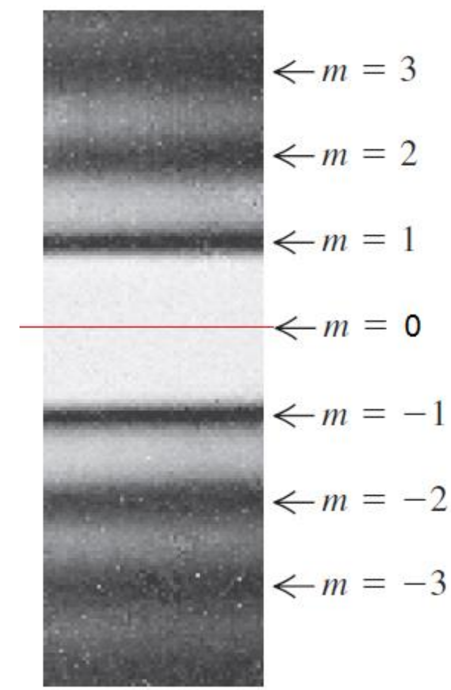


Difração de fenda simples

Exemplo 1

Neste caso, a distância entre os pontos sobre a tela é muito menor do que a distância entre a tela e a fenda, de modo que o ângulo θ é muito pequeno. Logo, podemos usar a relação aproximada fornecida pela equação $y_m = x\frac{m\lambda}{a}$ para encontrar a largura da fenda.

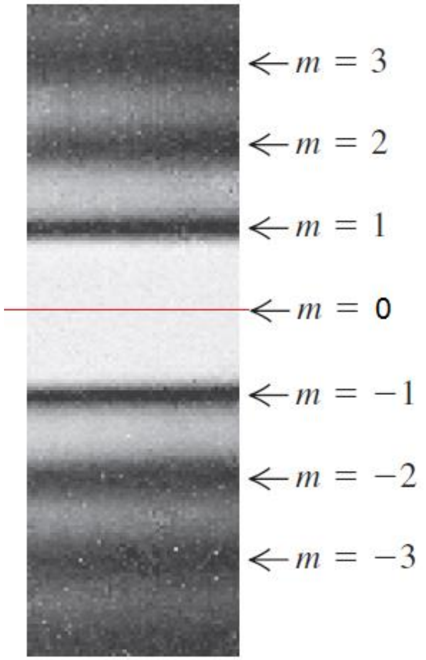




Difração de fenda simples

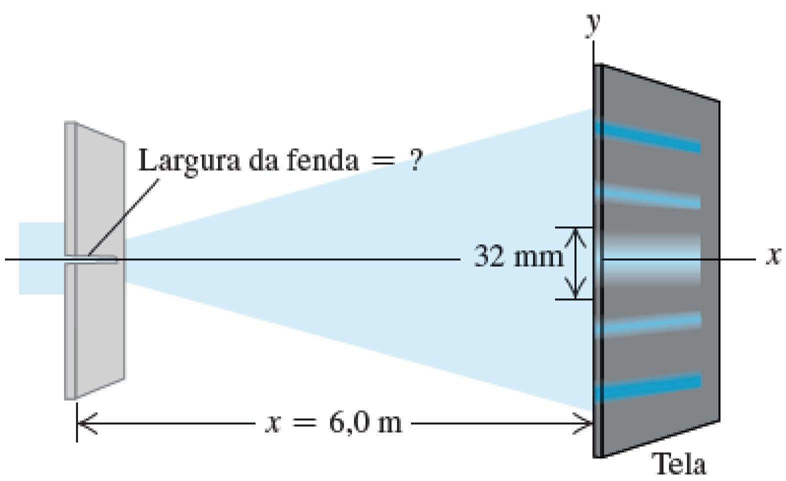
Exemplo 1

O primeiro mínimo corresponde a $m = 1$. A distância y_1 entre o máximo central e o primeiro mínimo é igual à metade da distância entre os dois primeiros mínimos, logo, $y_1 = (32\,mm)/2$.



$$y_m = x\frac{m\lambda}{a} \rightarrow a = \frac{x\lambda}{y_1} = \frac{6{,}0\,.\,633\,.\,10^{-9}}{32\,.\,10^{-3}}$$

a$= 2{,}4\,.\,10^{-4}\,m = 0{,}24\,mm$



Difração de fenda simples

Exemplo 2 - Uma fenda de largura a é iluminada com luz branca.

(a) Para qual valor de a o primeiro mínimo para a luz vermelha, com $\lambda = 650\,nm$, aparece em $\theta = 15°$?

Solução (a): A difração ocorre separadamente para cada comprimento de onda presente na luz que passa pela fenda, com as localizações dos mínimos para cada comprimento de onda dadas pela:

$$a\,sen\,\theta = m\lambda \rightarrow a = \frac{m\lambda}{sen\,\theta}$$

Difração de fenda simples

Exemplo 2

(a) Fazendo $m = 1$ e usando os valores conhecidos de θ e λ, obtemos:

$$a\, sen\, \theta = m\lambda \rightarrow a = \frac{m\lambda}{sen\, \theta}$$

$$a = \frac{m\lambda}{sen\, \theta} = \frac{(1)(650\, nm)}{sen\, 15^0} = 2511\, nm \approx 2{,}5\, \mu m$$

O resultado mostra que, para o espalhamento da luz incidente ser tão grande ($\pm 15°$ até o primeiro mínimo), é preciso que a fenda seja muito estreita, da ordem de apenas quatro vezes o comprimento de onda. Observe, para efeito de comparação, que um fio de cabelo humano tem cerca de $100\, \mu m$ de diâmetro.

Difração de fenda simples

Exemplo 2

(b) Qual é o comprimento de onda λ' da luz cujo primeiro máximo secundário está em $15°$, coincidindo assim com o primeiro mínimo para a luz vermelha?

Solução (b): Para qualquer comprimento de onda, o primeiro máximo secundário de difração fica aproximadamente a meio caminho entre o primeiro e o segundo mínimos.

As posições do primeiro e do segundo mínimos são dadas com m = 1 e m = 2, respectivamente. Isso significa que a posição aproximada do primeiro máximo secundário pode ser obtida fazendo m = 1,5. Assim, temos

Difração de fenda simples

Exemplo 2

$$a\ sen\ \theta\ =\ m\lambda \rightarrow asen\theta = 1{,}5\lambda'$$

$$\lambda' = \frac{a\ sen\ \theta}{1{,}5} = \frac{(2511\ nm)(sen\ 15^0)}{1{,}5} = 430\ nm$$

Esse comprimento de onda corresponde a uma luz violeta (que está no extremo azul do espectro visível, perto do limite de sensibilidade do olho humano). Como a razão λ/λ' não depende de a, o primeiro máximo secundário para uma luz com um comprimento de onda de $430\ nm$ sempre coincide com o primeiro mínimo para uma luz com um comprimento de onda de $650\ nm$, qualquer que seja a largura da fenda. Por outro lado, o ângulo θ, para o qual são observados esse máximo e esse mínimo, depende da largura da fenda. Quanto mais estreita a fenda, maior o valor de θ, e vice-versa.

Difração de fenda simples

Exemplo 3 - Avalie as seguintes experiências de difração produzidas em uma fenda simples e coloque-as em ordem, da maior para a menor, em termos do tamanho do ângulo formado entre o centro da figura de difração e a primeira franja escura:

(i) comprimento de onda $400\ nm$, largura da fenda $0{,}20\ mm$;

(ii) Comprimento de onda $600\ nm$, largura da fenda $0{,}20\ mm$;

(iii) comprimento de onda $400\ nm$, largura da fenda $0{,}30\ mm$;

(iv) comprimento de onda $600\ nm$, largura da fenda $0{,}30\ mm$.

Difração de fenda simples

Exemplo 3

O ângulo u da primeira franja escura é dado com $m = 1$,

$$a\ sen\ \theta\ =\ m\lambda \rightarrow asen\theta = 1\lambda \rightarrow sen\ \theta = \frac{\lambda}{a}$$

Quanto maior o valor da razão λ/a, maior o valor de $sen\ \theta$ e, portanto, o valor de θ. A razão λ/a em cada um dos casos é

(i) comprimento de onda $400\ nm$, largura da fenda $0{,}20\ mm$;

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{400\ nm}{0{,}20\ mm} = 2{,}0 \times 10^{-3} m$$

(ii) Comprimento de onda $600\ nm$, largura da fenda $0{,}20\ mm$;

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{600\ nm}{0{,}20\ mm} = 3{,}0 \times 10^{-3} m$$

Difração de fenda simples

Exemplo 3

(iii) comprimento de onda $400\ nm$, largura da fenda $0{,}30\ mm$

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{400\ nm}{0{,}30\ mm} = 1{,}3 \times 10^{-3} m$$

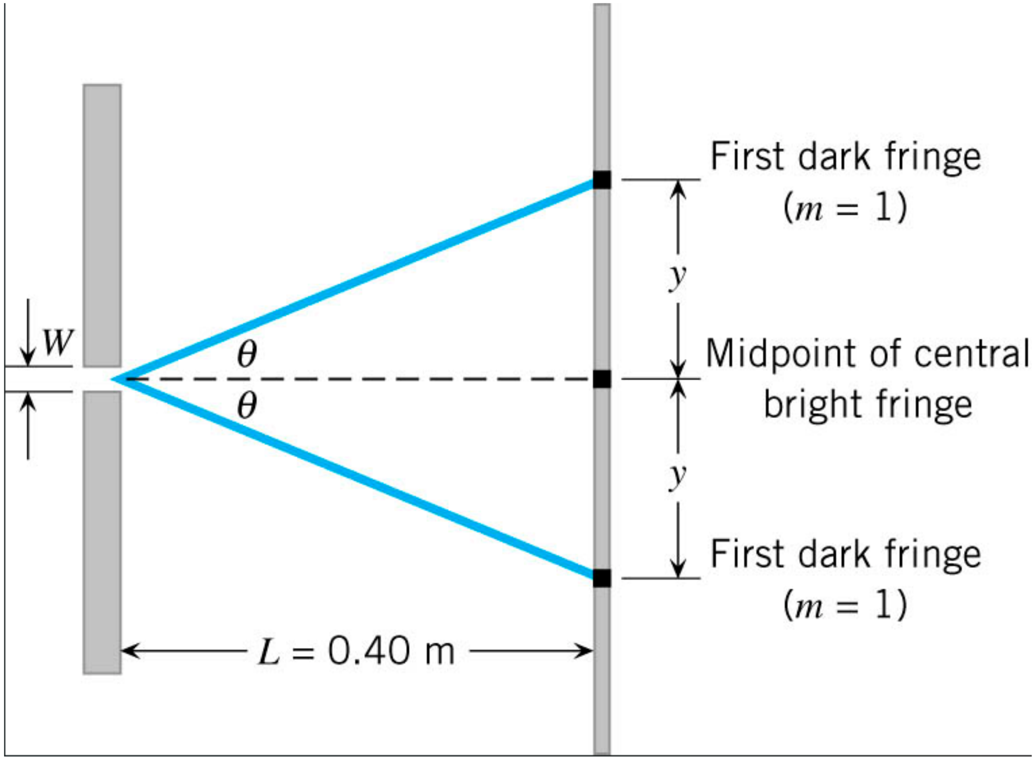
(iv) comprimento de onda $600\ nm$, largura da fenda $0{,}30\ mm$.

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{600\ nm}{0{,}30\ mm} = 2{,}0 \times 10^{-3} m$$

Resposta: (ii), (i) e (iv) (empate), (iii)

Difração de fenda simples

Exemplo 4 – A luz passa por uma fenda e ilumina uma tela plana situada a uma distância $L = 0{,}40m$. A largura da fenda é $w = 4{,}0 \times 10^{-6}m$. A distância entre o meio da franja central e a primeira franja escura é y. Determine a largura $2y$ da franja central se o comprimento de onda da luz no vácuo for (a) $\lambda = 690nm$; (b) $\lambda = 410nm$.



Difração de fenda simples

Exemplo 4

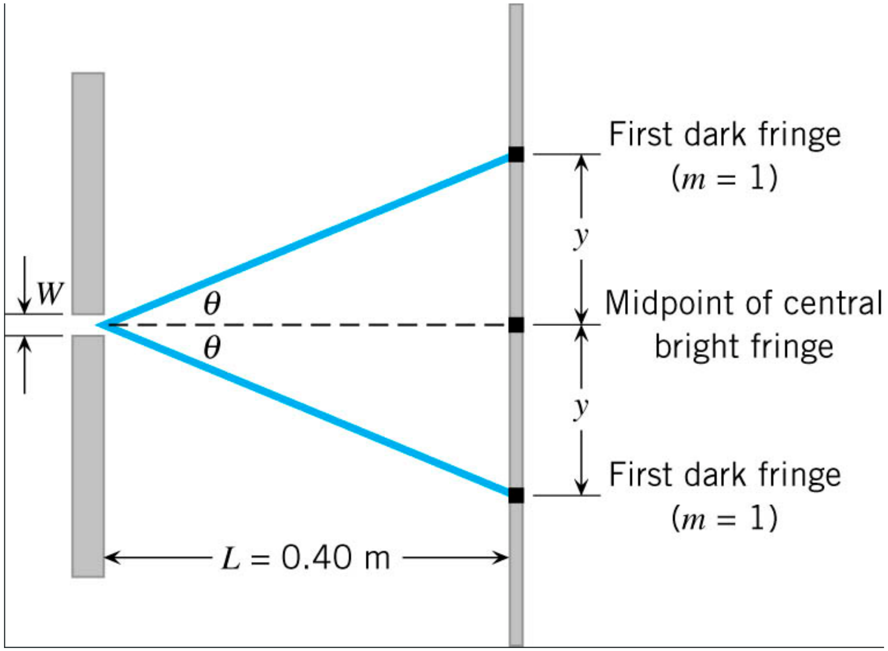
(a) $L = x = 0{,}40m$

$w = a = 4{,}0 \times 10^{-6}m$

$\lambda = 690nm$

$2y = ?$

Primeira franja escura: $m = 1$



$$a\ sen\ \theta\ =\ m\lambda \rightarrow a\ sen\theta = 1\lambda \rightarrow sen\ \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{690\times 10^{-9}m}{4\times 10^{-6}m}$$

$$sen\ \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{690 \times 10^{-9}m}{4 \times 10^{-6}m} = 0{,}175\ \rightarrow\ \theta = 9{,}9°$$

Difração de fenda simples

Exemplo 4

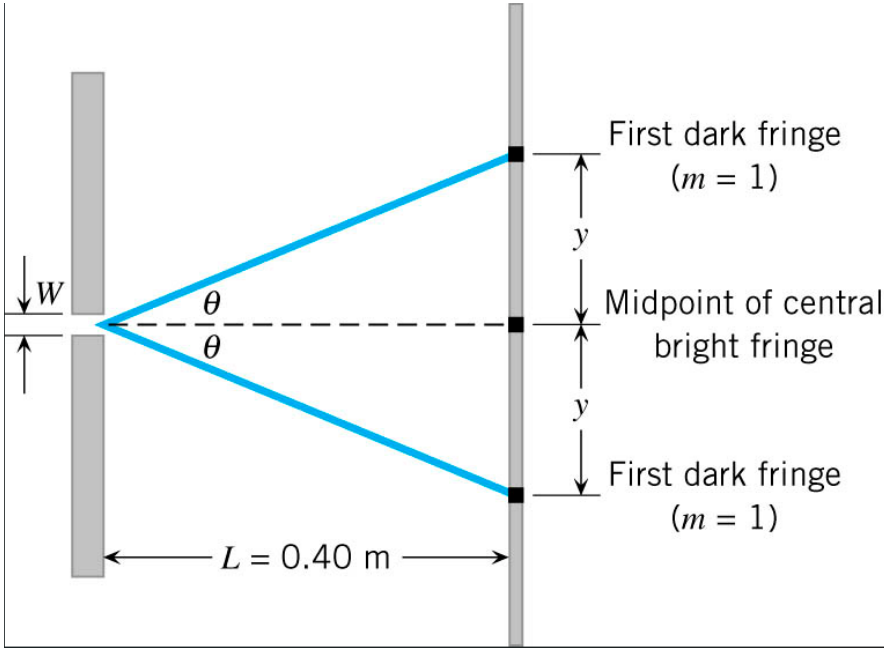
(b) $L = x = 0{,}40m$

$w = a = 4{,}0 \times 10^{-6}m$

$\lambda = 410nm$

$2y = ?$

Primeira franja escura: $m = 1$



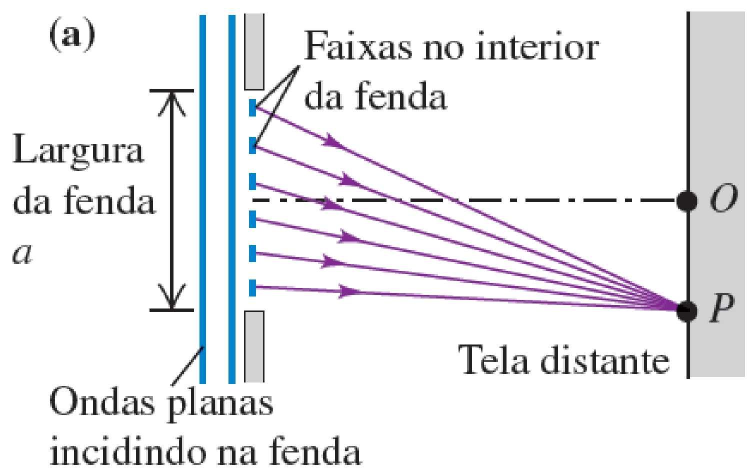
$$a\ sen\ \theta\ = m\lambda \rightarrow a\ sen\theta = 1\lambda \rightarrow sen\ \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{410 \times 10^{-9}m}{4 \times 10^{-6}m}$$

$$sen\ \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{410 \times 10^{-9}m}{4 \times 10^{-6}m} = 0{,}1025\ \rightarrow\ \theta = 5{,}9°$$

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Podemos deduzir uma expressão para a distribuição da intensidade na difração produzida por uma fenda única usando o mesmo método da soma de fasores usados para determinar a **intensidade das figuras de interferências** para o caso da figura de interferência com fenda dupla.

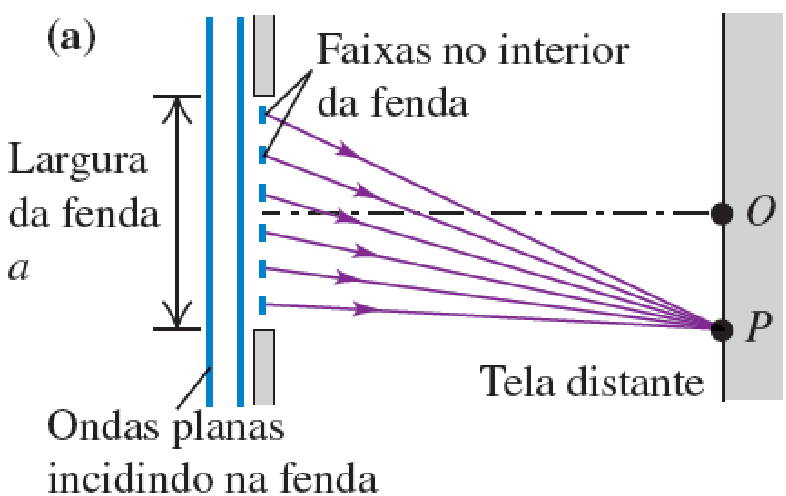
Supomos que a frente de onda plana na fenda esteja subdividida em um grande número de faixas. Superpomos todas as contribuições das frentes de onda secundárias de Huygens que atingem o ponto **P** sobre a tela distante e que formam um ângulo θ com a normal ao plano da fenda.



Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Para isso, usamos um fasor que represente cada campo senoidal variável proveniente de cada faixa. O módulo da soma vetorial dos fasores em cada ponto P fornece a amplitude $\boldsymbol{E_p}$ do campo resultante $\vec{E}$ nesse ponto. A intensidade no ponto **P** é proporcional a E_p^2.

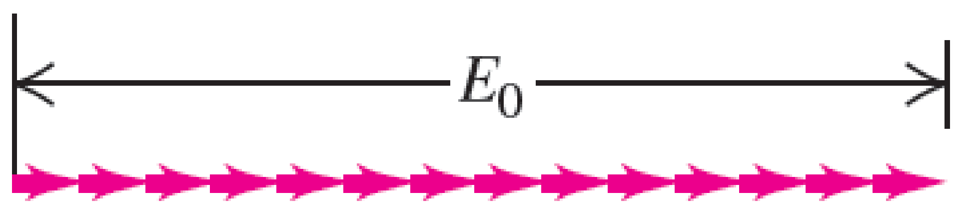
No ponto **O** na Figura (a), correspondente ao centro da figura onde $\theta = 0$, existem diferenças de caminhos desprezíveis para $x \gg a$; todos os fasores estão essencialmente em fase (ou seja, possuem a mesma direção e o mesmo sentido).



Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Na Figura (b), desenhamos o diagrama de fasores no tempo $t = 0$ e designamos por E_0 a amplitude resultante no ponto **O**. Nessa ilustração dividimos a fenda em 14 faixas.

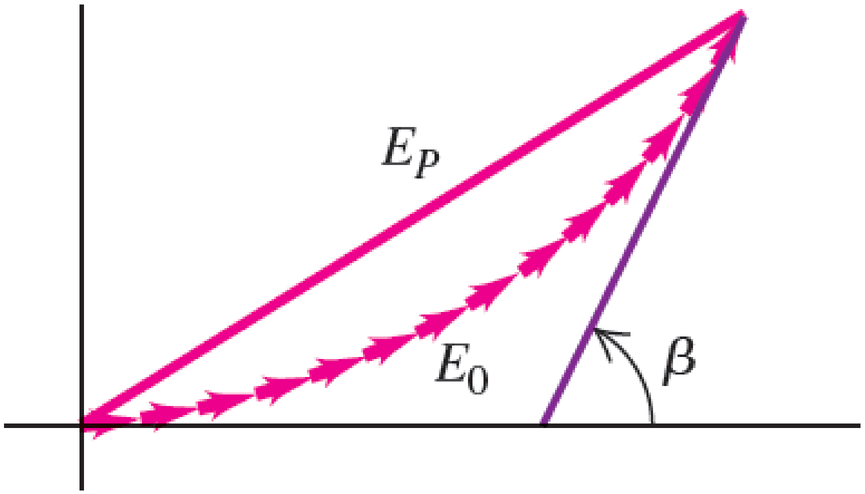
(b) No centro da figura de difração (ponto *O*), os fasores de todas as faixas no interior da fenda estão em fase.



Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Em virtude da diferença de caminho, existe agora uma diferença de fase entre as ondas provenientes de faixas adjacentes; o diagrama de fasores correspondente pode ser visto na Figura c.

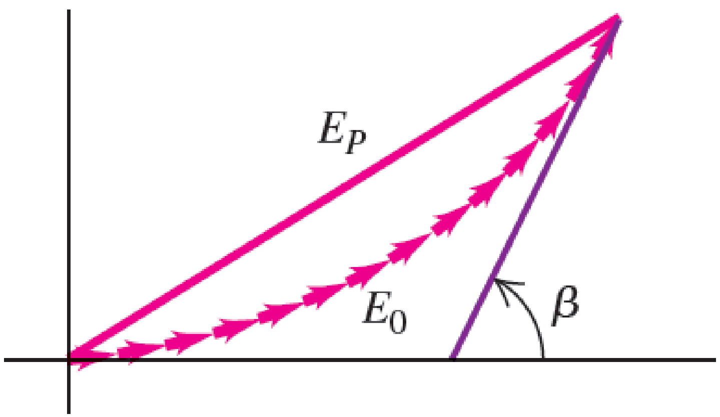
(c) Diagrama de fasores em ponto levemente deslocado em relação ao centro da figura; β = diferença de fase total entre o primeiro e o último fasor.



Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

A soma vetorial dos fasores é indicada pelo perímetro de um polígono com muitos lados, e a amplitude E_p do campo elétrico resultante no ponto **P** é dada pela corda dessa poligonal.

(c) Diagrama de fasores em ponto levemente deslocado em relação ao centro da figura; β = diferença de fase total entre o primeiro e o último fasor.

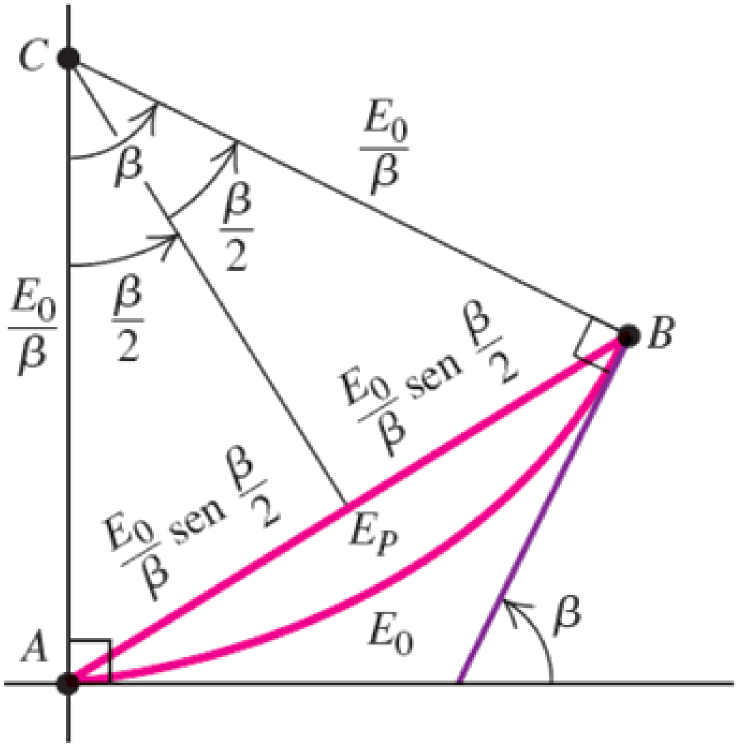


O ângulo β é a diferença de fase total entre a onda recebida em **P** proveniente da faixa do topo da Figura (a) em relação à onda que chega ao ponto **P** proveniente da faixa inferior.

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Suponhamos que a fenda seja subdividida em faixas cada vez mais estreitas. No limite, quando existe um número infinito de faixas infinitamente estreitas, a linha poligonal de fasores transforma-se em um arco de circunferência (Figura (d)), cujo comprimento de arco é igual ao valor E_0 mostrado na Figura (b).

(d) Como em (c), mas no limite atingido quando a fenda é subdividida em um número infinito de faixas.

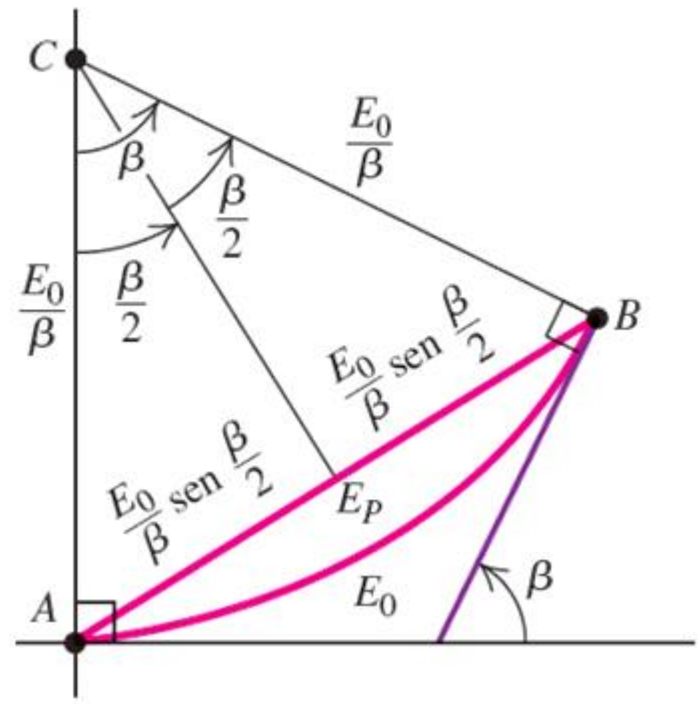


Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

O centro **C** desse arco é encontrado traçando-se perpendiculares em **A** e em **B**. De acordo com a relação entre comprimento de arco, raio e ângulo, o raio do arco é dado por E_0/β; a amplitude E_p do campo elétrico resultante no ponto **P** é dada pela corda **AB**, cujo comprimento é $2(E_0/\beta)\, sen\, (\beta/2)$. (Note que β precisa ser expresso em radianos!) Portanto, obtemos

$$E_p = \frac{E_0}{\frac{\beta}{2}} sen\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

(amplitude na difração produzida em uma fenda única)



Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

A intensidade em cada ponto da tela é proporcional ao quadrado da amplitude dada pela Equação

$$E_p = \frac{E_0}{\frac{\beta}{2}} sen\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Designando por I_0 a intensidade na direção frontal para $\theta = 0$ e $\beta = 0$, então a intensidade I em qualquer ponto da tela é

$$I = I_0 \left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\right]^2$$

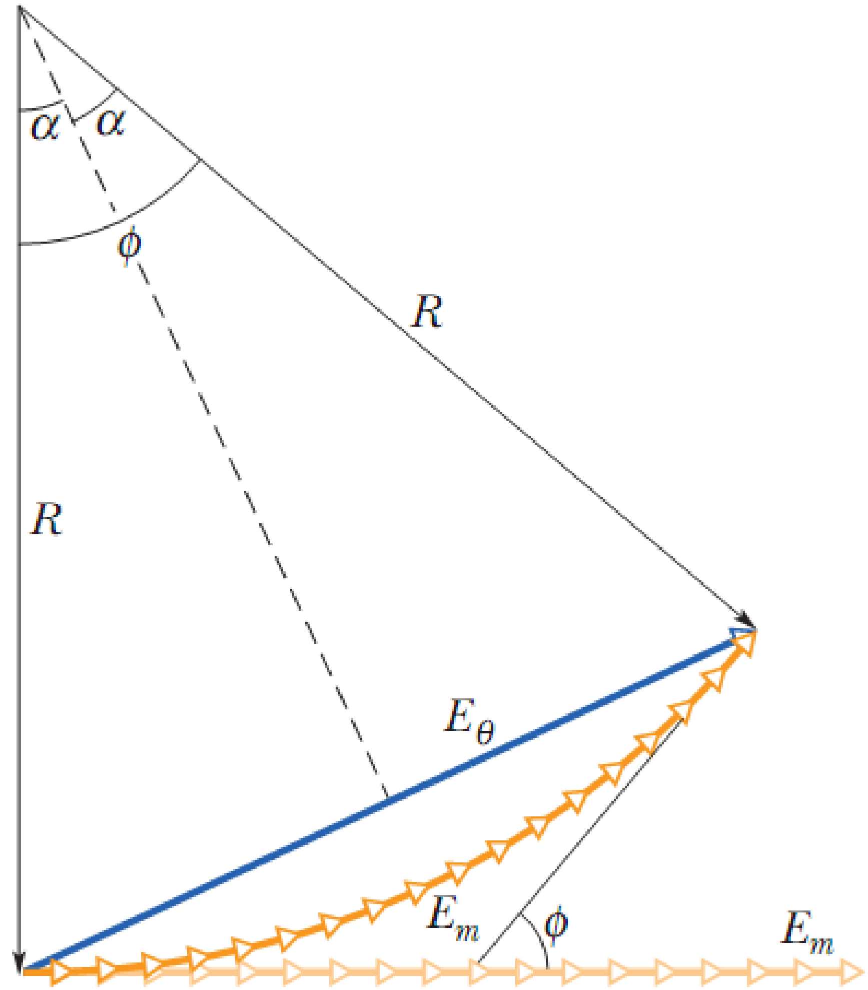
(intensidade na difração em uma fenda única)

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Alterando a denominação dos ângulos, podemos escrever (Hailiday e Resnick):

$$E_p = \frac{E_0}{\alpha} sen(\alpha)$$

$$I = I_0 \left[\frac{sen(\alpha)}{\alpha}\right]^2$$



Difração

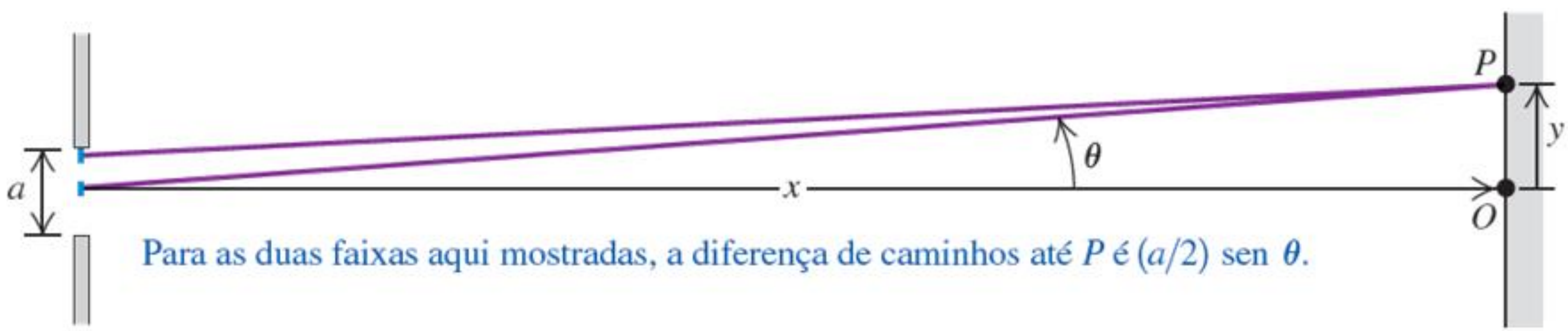
Capítulo 36

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

Podemos expressar a diferença de fase β em termos das grandezas geométricas, como fizemos no caso da figura de interferência com fenda dupla (capítulo anterior). Pela Equação (capítulo anterior)

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1),$$

a diferença de fase é $2\pi/\lambda$ vezes a diferença de caminho. Como indica a Figura, a diferença de caminho entre o raio proveniente do topo da fenda e o raio que sai do meio dela é igual a $\frac{a}{2}\, sen\ \theta$



Para as duas faixas aqui mostradas, a diferença de caminhos até P é $(a/2)$ sen θ.

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

A diferença de caminho entre o raio proveniente do topo da fenda e o raio que sai da extremidade inferior da fenda é igual ao **dobro** desse valor, logo,

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a\, sen\theta \,,$$

Podemos reescrever a equação:

$$I = I_0 \left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 \rightarrow \qquad I = I_0 \left\{ \frac{sen[\pi a (sen\,\theta)] / _\lambda}{\pi a (sen\,\theta) / _\lambda} \right\}^2$$

Ângulo da linha do centro da fenda até a posição na tela

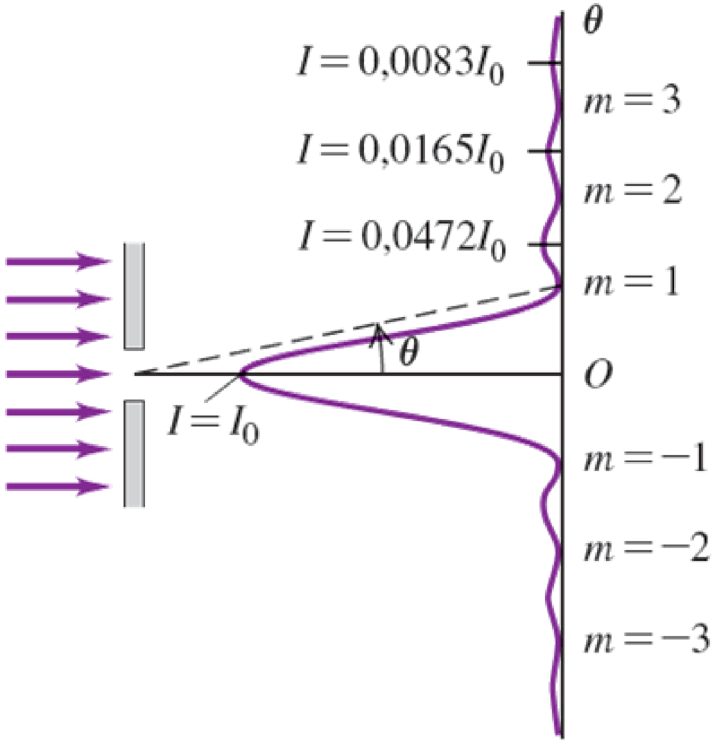
Intensidade na difração em uma fenda única

$$I = I_0 \left\{ \frac{\mathrm{sen}[\pi a (\mathrm{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a (\mathrm{sen}\,\theta)/\lambda} \right\}^2$$

Intensidade em $\theta = 0$ Largura da fenda Comprimento de onda

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

A Figura ilustra um gráfico da Equação (*vai ser mostrado a seguir*). Note que a intensidade da franja brilhante central é muito maior que a intensidade de qualquer uma das outras franjas. Isso significa que a maioria da potência da onda permanece dentro de um ângulo θ com a perpendicular à fenda, onde $sen\ \theta = \frac{\lambda}{a}$ (o primeiro mínimo da difração).



$$I = I_0 \left\{ \frac{sen[\pi a(sen\ \theta)]/\lambda}{\pi a(sen\ \theta)/\lambda} \right\}^2$$

Intensidade na difração produzida por uma fenda simples

As franjas escuras da figura de difração correspondem a $I = 0$. Esses pontos correspondem quando o numerador da equação $I = I_0\left[\frac{sen\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$ é zero, ou seja, β é múltiplo de 2π.

Pela equação $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\,sen\theta$, essa condição corresponde a

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\,sen\theta = 2\pi = 4\pi = \cdots \rightarrow \frac{a\,sen\,\theta}{\lambda} = m$$

$$\frac{a\,sen\theta}{\lambda} = m \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$sen\theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Também podemos aplicar a Equação $I = I_0 \left[\frac{sen\ (\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$ para determinar a posição dos picos, ou dos *máximos*, e o valor da intensidade de cada um desses picos.

Isso não é tão simples quanto pode parecer. Esperaríamos que os picos ocorressem nos pontos em que a função seno atingisse valores iguais a ± 1, ou seja, quando $\beta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$, ou, em geral,

$$\beta = \pm(2m + 1)\pi \qquad \text{(m = 0, 1, 2, 3, ...)}$$

Isso é *aproximadamente* correto; entretanto, por causa do fator $(\beta/2)^2$ no denominador da Equação, os máximos não ocorrem precisamente nesses pontos.

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Quando derivamos a Equação $I = I_0 \left[\frac{sen\ (\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$ em relação a β e igualamos a zero o resultado para tentar determinar os máximos e mínimos, obtemos uma equação transcendental que deve ser resolvida numericamente.

- Na realidade, não existe nenhum *máximo* nas vizinhanças de $\beta = \pm\pi$.

- Os **primeiros máximos**, um de cada lado do máximo central, nas vizinhanças de $\beta = \pm 3\pi$, na verdade ocorrem para os valores $\pm 2{,}860\pi$.

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

- Os **segundos máximos** laterais, nas vizinhanças de $\beta = \pm 5\pi$, ocorrem na verdade para $\pm 4{,}918\pi$, e assim por diante.

- O erro da Equação se anula no limite de valores grandes de m, ou seja, para os máximos de intensidade muito afastados do centro da figura de difração.

- Para calcular as intensidades dos máximos laterais, substituímos esses valores de β:

$$I = I_0 \left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 \rightarrow \qquad \beta = \pm(2m+1)\pi$$

Resulta:

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

onde I_m é a intensidade do máximo lateral de ordem m e I_0 é a intensidade do máximo central. A Equação fornece a série de intensidades

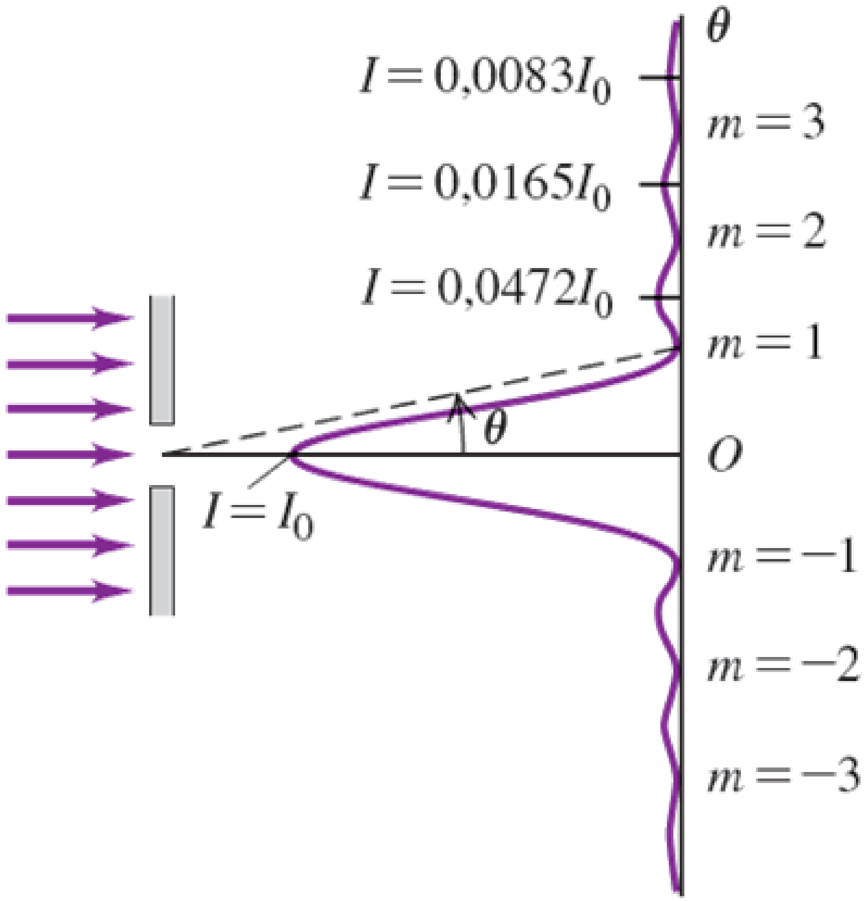
$$0{,}0450 I_0 \qquad 0{,}0162 I_0 \qquad 0{,}0083 I_0$$

e assim por diante. Como dissemos anteriormente, essa equação está apenas aproximadamente correta. Verificamos que as intensidades verdadeiras desses *máximos* laterais são

$$0{,}0472 I_0 \qquad 0{,}0165 I_0 \qquad 0{,}0083 I_0 \quad \ldots$$

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Note que as intensidades dos máximos laterais diminuem muito rapidamente, como a Figura também indica. Até mesmo o primeiro máximo apresenta menos de 5% da intensidade do máximo central.



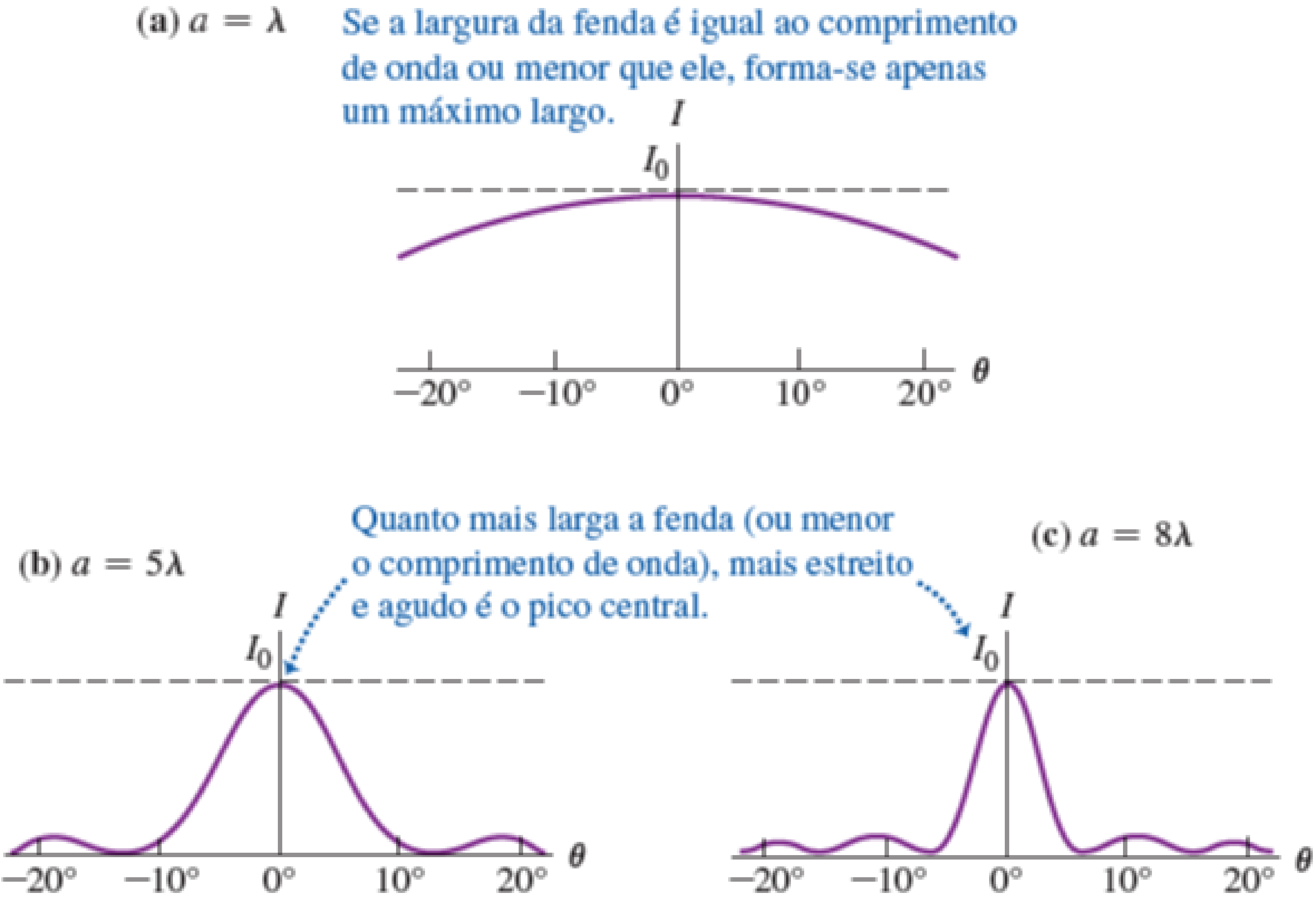
Largura da figura de difração em uma fenda única

Para ângulos pequenos, o espalhamento angular da figura de difração é *inversamente proporcional* à largura da fenda $\boldsymbol{a}$ ou, mais precisamente, à razão entre $\boldsymbol{a}$ e o comprimento de onda $\boldsymbol{\lambda}$.

Para ângulos pequenos podemos considerar $sen\,\theta = \theta$, para a posição θ_1, do primeiro mínimo ($m = 1$), corresponde $\frac{\beta}{2} = \pi$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a\, sen\theta \;\rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a\,\theta_1 \rightarrow \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

Largura da figura de difração em uma fenda única



Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 5

a) A intensidade no centro de uma figura de difração de fenda única é I_0. Qual é a intensidade em um ponto onde a diferença de fase total entre as ondas secundárias provenientes do topo da parte superior da fenda é igual a 66 rad?

$$\beta = 66 \text{ rad}, \ \frac{\beta}{2} = 33\, rad$$

$$I = I_0 \left[\frac{sen\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 = I_0 \left[\frac{sen(33rad)}{33rad}\right]^2 = 9{,}3.10^{-4}\, I_0$$

b) Se esse ponto está 7,0° afastado do máximo central, quantos comprimentos de ondas de largura tem a fenda?

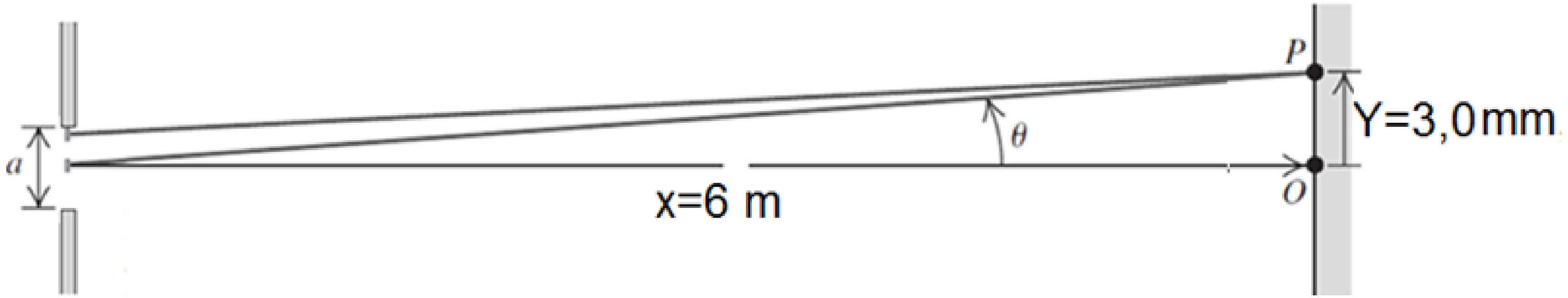
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a sen\theta \rightarrow a = \frac{\beta\lambda}{2\pi sem\theta} = \frac{(66\, rad)\lambda}{(2\pi\, rad) sen\, 7°} = 86\lambda$$

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 6

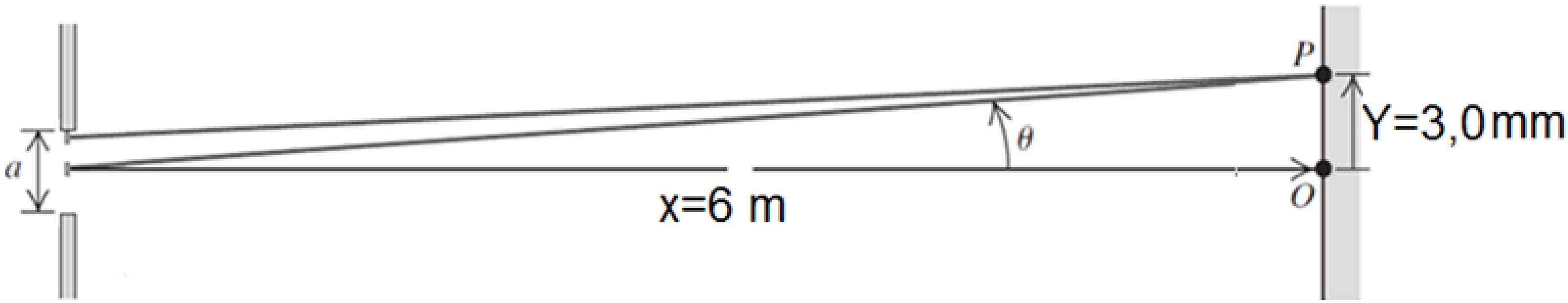
Qual é a intensidade em um ponto sobre a tela a uma distancia de 3 mm do centro da figura de difração? A intensidade no centro é igual a I_0.

Dados: $a = 2{,}4\,.\,10^{-4}\,m = 0{,}24\,mm\ \ e\ \lambda = 633\,nm$



Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 6



$$a = 2{,}4\,.\,10^{-4}\,m = 0{,}24\,mm\ \ e\ \lambda = 633\,nm$$

$$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{3.10^{-3}}{6} = 5.10^{-4}, logo\ sen\theta = tag\theta = \theta = 5.10^{-4} rad$$

$$I = I_0\left[\frac{sen\,[\pi a(sen\theta)/\lambda]}{\pi a(sen\theta)/\lambda}\right]^2 \rightarrow I = I_0\left[\frac{sen\,[\pi.\,2{,}4\,.\,10^{-4}(5.10^{-4})/633.10^{-9}]}{\pi.\,2{,}4\,.\,10^{-4}(5.10^{-4})/633.10^{-9}}\right]^2$$

$$I = I_0\left[\frac{sen\,0{,}60}{0{,}60}\right]^2 = 089 I_0$$

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 7

Determine as intensidades dos três primeiros máximos secundários da figura de difração de uma fenda da Figura, expressas como porcentagens da intensidade do máximo central.

Solução: Os máximos secundários estão aproximadamente a meio caminho entre os mínimos, cujas localizações são dadas pela $\frac{\beta}{2} = m\pi$. As localizações dos máximos secundários são, portanto, dadas (aproximadamente) por $\frac{\beta}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, para $m = 1, 2, 3, ...$, onde β é medido em rad. Podemos relacionar a intensidade I em qualquer ponto da figura de difração à intensidade I_m do máximo central pela

Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 7

$$I = I_0\left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\right]^2 = \left(\frac{sen(m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 \rightarrow \frac{I}{I_0} = \left(\frac{sen(m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right)^2$$

Para $m = 1$

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{sen(1+\frac{1}{2})\pi}{(1+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 = \left(\frac{sen\ 1{,}5\pi}{1{,}5\pi}\right)^2 = 4{,}5 \times 10^{-2} = 4{,}5\%$$

Para $m = 2$

$$\frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{sen(2+\frac{1}{2})\pi}{(2+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 = \left(\frac{sen\ 2{,}5\pi}{2{,}5\pi}\right)^2 = 1{,}6 \times 10^{-2} = 1{,}6\%$$

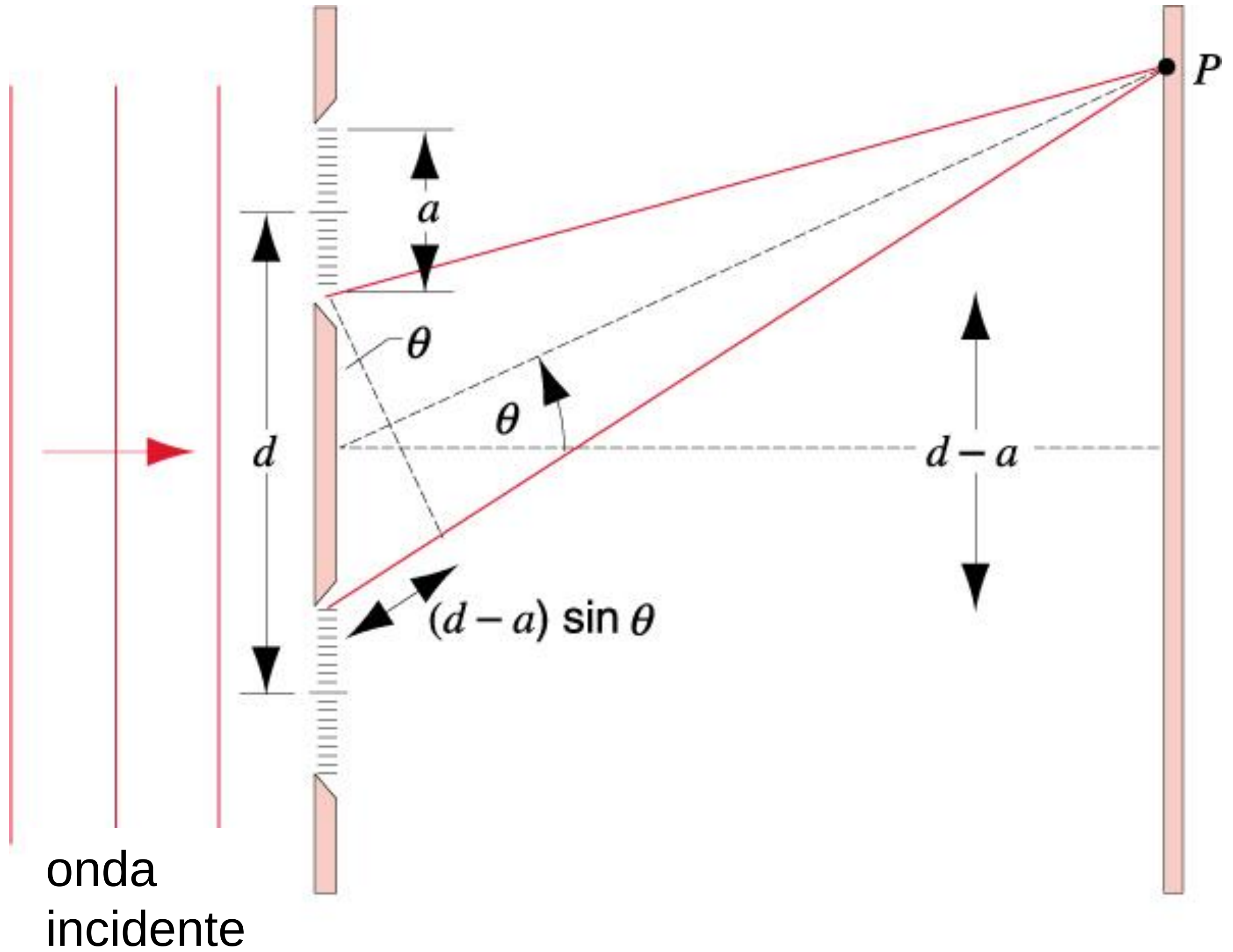
Máximos da figura de difração produzida em uma fenda única

Exemplo 7

Para $m = 3$

$$\frac{I_3}{I_0} = \left(\frac{sen(3+\frac{1}{2})\pi}{(3+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 = \left(\frac{sen\ 3{,}5\pi}{3{,}5\pi}\right)^2 = 0{,}83 \times 10^{-2} = 0{,}83\%$$

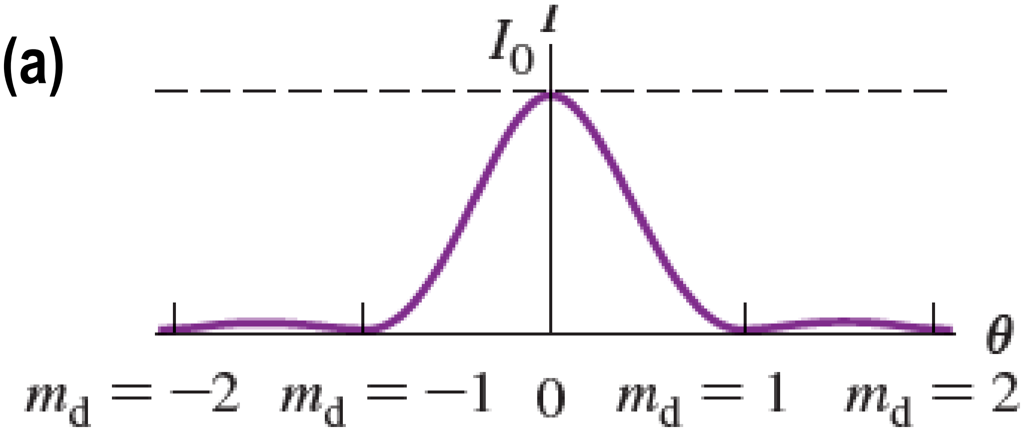
Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas



Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

A **Figura (a)** mostra a intensidade em uma figura de difração para uma fenda única de largura a. Os mínimos da difração são indicados pela notação dos números inteiros $m_d = \pm 1, \pm 2, ...$ (o índice "d" indica "difração").

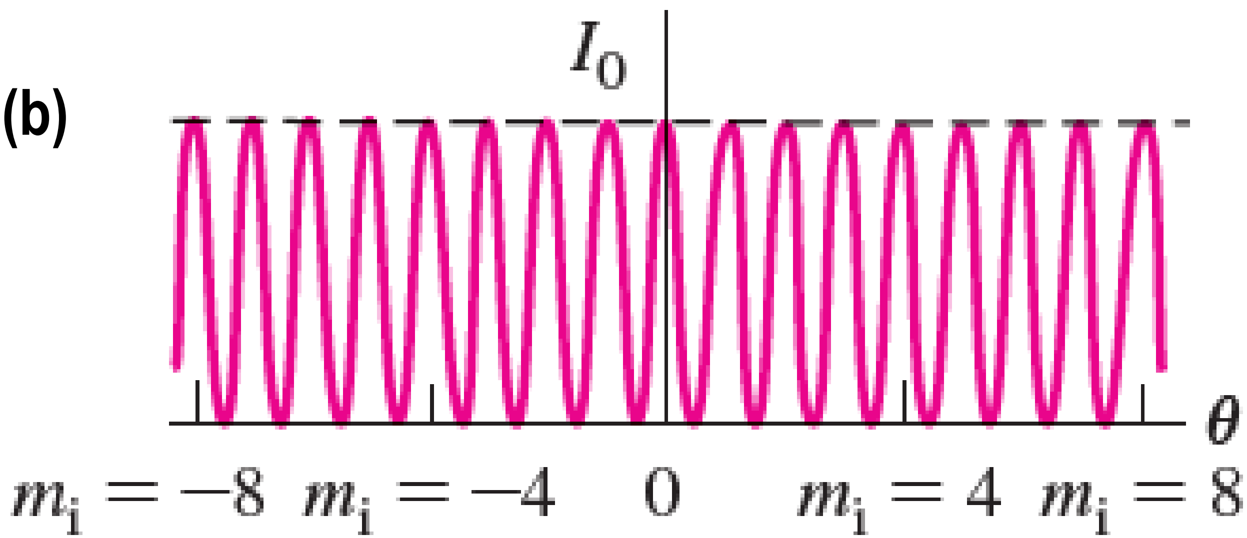
(a)



Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

A **Figura (b)** apresenta a figura formada pelos raios provenientes de duas fendas estreitas separadas por uma distância d igual a quatro vezes a largura a da fenda indicada na **Figura (a)**; ou seja, $d = 4a$. Os máximos da interferência são indicados pelo número inteiro $m_i = 0, \pm 1, \pm 2,$ ... (o índice "i" indica "interferência").

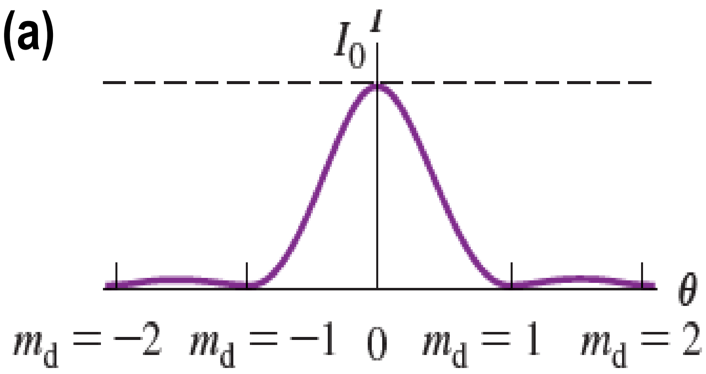
(b)



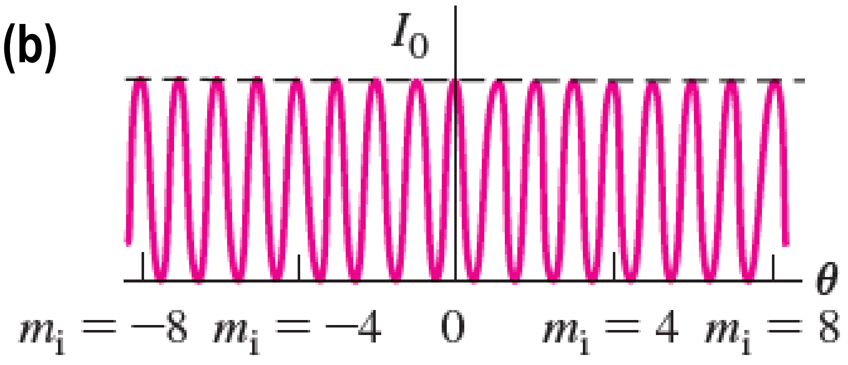
Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

Note que o espaçamento entre os dois primeiros mínimos adjacentes ao centro da figura de difração da fenda única é quatro vezes maior que no caso da figura de interferência da fenda dupla.

(a)



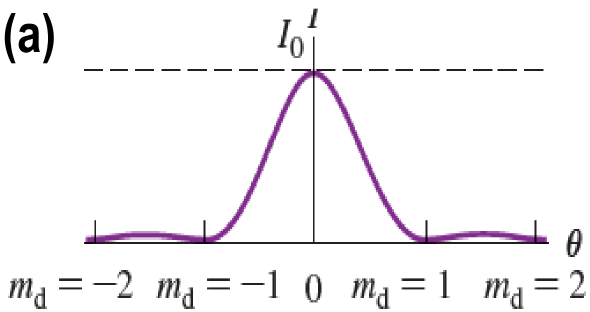
(b)



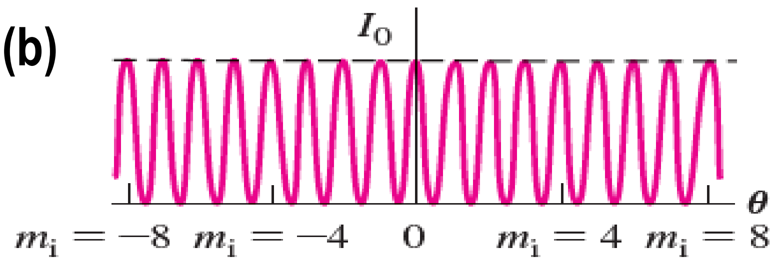
Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

Suponha agora que a largura dessas duas fendas seja aumentada até atingir o mesmo valor da largura a da fenda única indicada na **Figura (a)**.

(a)

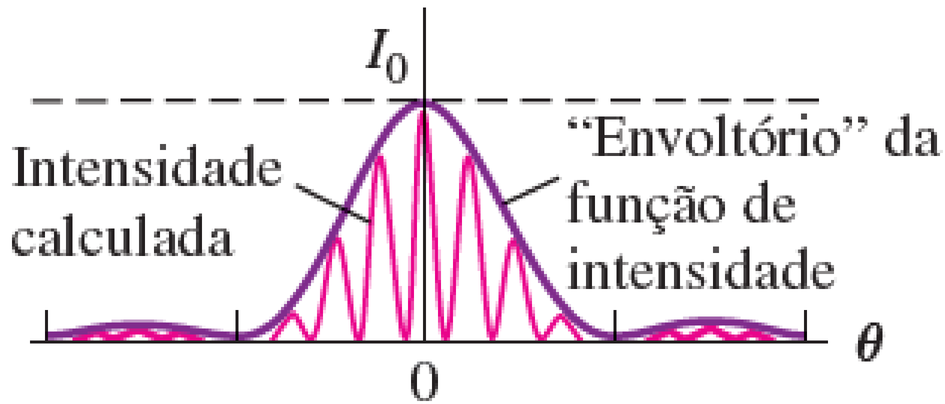


(b)



A **Figura (c)** mostra a configuração formada pelas duas fendas de largura a separadas por uma distância (entre seus centros) $d = 4a$.

(c)



Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

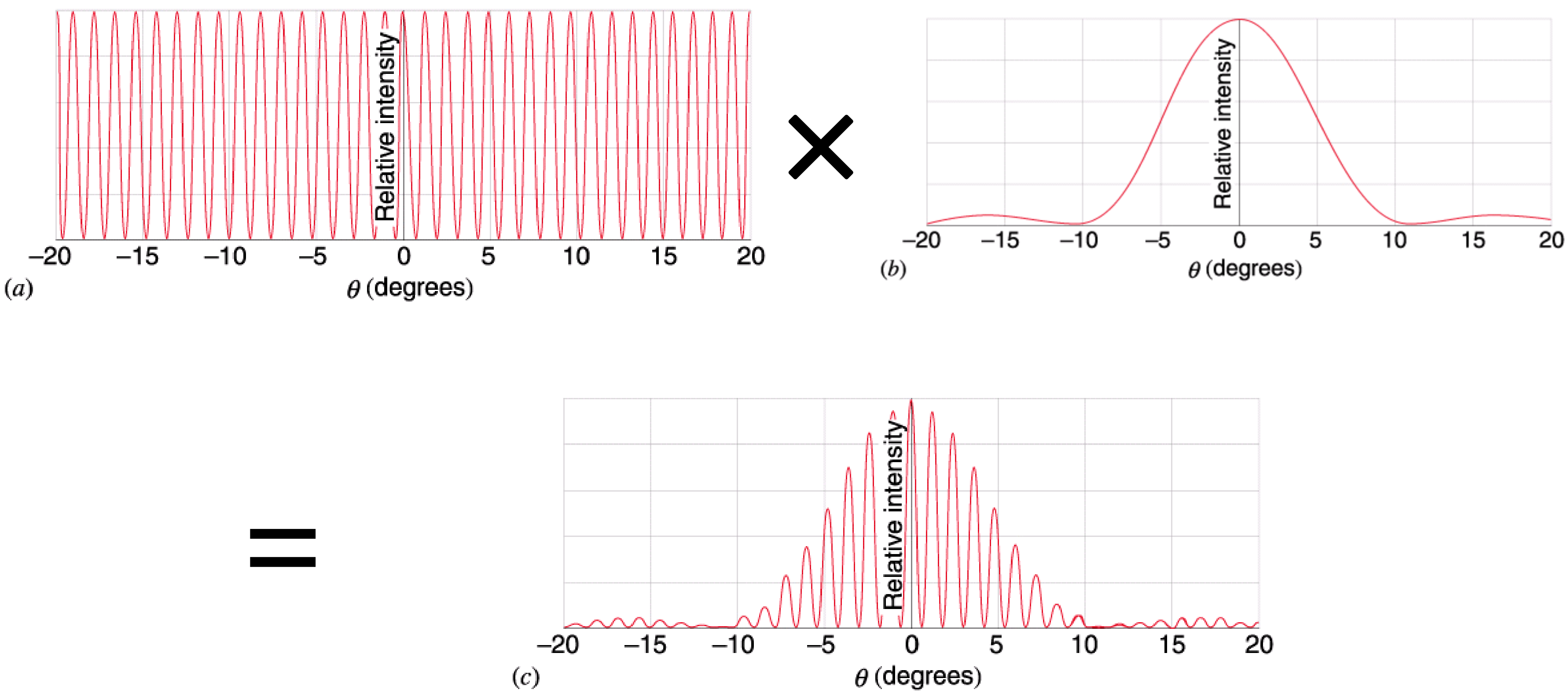
O efeito da largura finita das fendas consiste em fazer a superposição dos efeitos das duas figuras anteriores, ou seja, as intensidades são multiplicadas em cada ponto.

Os picos da interferência da fenda dupla continuam nas mesmas posições anteriores; contudo, suas intensidades são moduladas pela intensidade da difração na fenda única.

A expressão para a intensidade na **Figura (c)** é proporcional ao produto da intensidade na experiência da fenda dupla, dada pela Equação do capítulo anterior $I = I_0 cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ multiplicada pela Equação $I = I_0\left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\right]^2$:

Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

Distribuição de Intensidade: Difração Fenda Única + Interferência



Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

i. $I = I_0 cos^2 \frac{\phi}{2} \rightarrow intesidade\ na\ interferência\ de\ duas\ fontes$

ii. $I = I_0 \left[\frac{sen\ (\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \rightarrow intesidade\ da\ difração\ de\ fenda\ única$

$$I = I_0 cos^2 \left(\frac{\phi}{2}\right) \left[\frac{sen(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\right]^2$$

Onde

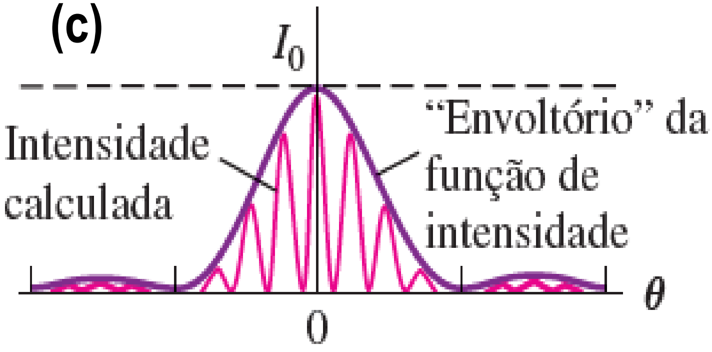
$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} sen\ \theta \ \ e\ \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} sen\ \theta$$

Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

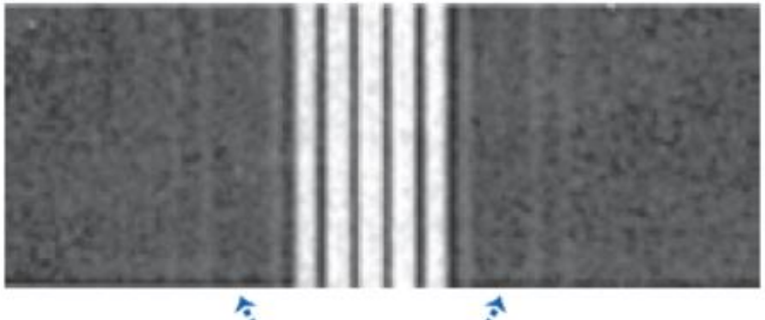
Note, na **Figura (c)**, que estão ausentes em ambos os lados da figura todos os máximos de interferência cujas ordens sejam múltiplos de quatro, pois esses máximos ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$) coincidem com os mínimos da difração ($m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Isso também pode ser visto na **Figura (d)**, que é uma fotografia da figura real para $d = 4a$. Você deve se convencer de que haverá máximos "ausentes" toda vez que d for um múltiplo inteiro de a.

(c)



(d)



Para $d = 4a$, todos os máximos com número de ordem múltiplo de quatro ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$) nos lados estão ausentes.

Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

Exemplo 8

Suponha que duas fendas, ambas com largura a, estejam separadas por uma distância $d = 2{,}5a$. Existem máximos ausentes na figura de interferência produzida por essas fendas? Caso existam, quais estão ausentes? Caso contrário, por que eles não existem?

Um “máximo ausente” satisfaz:

* $d\ sen\ \theta = m_i \lambda$ (a condição para uma interferência máxima)
* $a\ sen\ \theta = m_d \lambda$ (a condição para um mínimo de difração).

Fendas múltiplas: duas fendas com larguras finitas

Exemplo 8

$$d\ sen\ \theta = m_i\lambda \quad \rightarrow \quad 2{,}5a\ sen\ \theta = m_i\lambda$$

$$a\ sen\ \theta = m_d\lambda \quad \rightarrow \quad a = \frac{m_d\lambda}{sen\ \theta}$$

$$2{,}5\frac{m_d\lambda}{sen\ \theta} sen\ \theta = m_i\lambda \quad \rightarrow \quad m_i = 2{,}5m_d$$

Essa relação é satisfeita por $m_i = 5$ e $m_d = 2$ (o quinto máximo de interferência está ausente porque coincide com a segunda difração mínima), $m_i = 10$ e $m_d = 4$ (o décimo máximo de interferência está ausente porque coincide com a quarta difração mínima), e assim por diante.

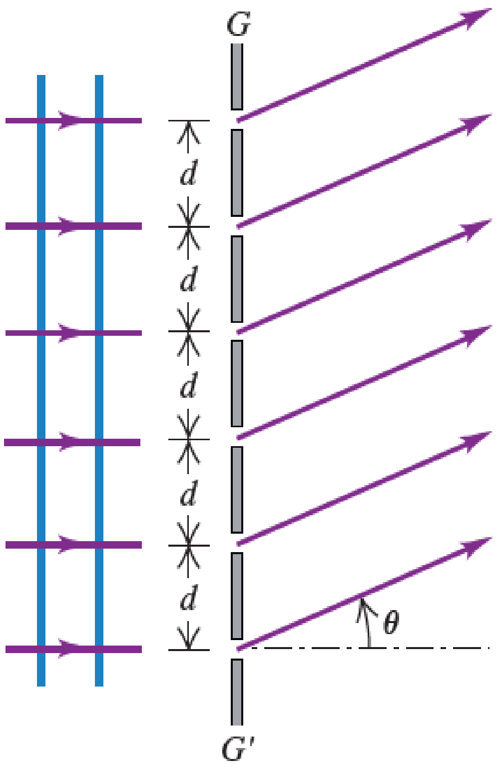
Resposta: sim; $m_1 = \pm 5, \pm 10$ ...

Rede de difração

- *Rede de difração*: conjunto que contém um número grande de fendas paralelas, todas com a mesma largura a e a mesma distância d entre os centros de duas fendas consecutivas.

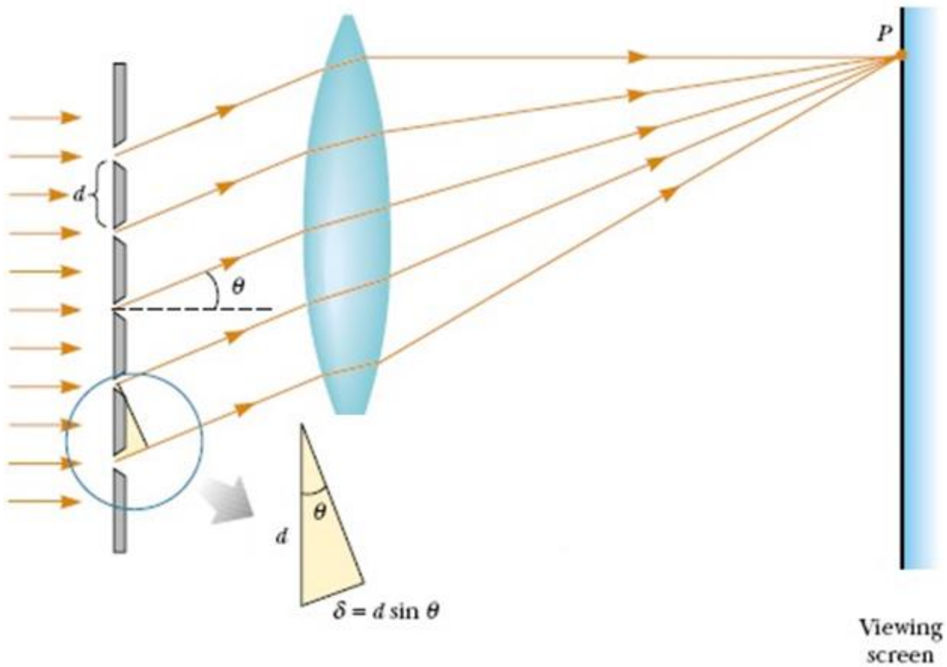
- A primeira rede de difração foi construída por Fraunhofer, usando fios finos.

- As redes podem ser feitas com uma ponta de diamante para gerar sulcos igualmente espaçados sobre uma superfície de vidro ou de metal, ou então fazendo-se a redução de uma fotografia de um conjunto de faixas claras e escuras impressas sobre uma folha de papel.



Rede de difração

Diferença de caminho entre dois raios de fendas adjacentes (mesmo procedimento adotado para interf. em fenda dupla):



$$d\ sen\ \theta = m\ \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

m = 0 (máximo central): é o mesmo para todos os comprimentos de onda.

Rede de difração

- Para uma rede de difração, o termo fenda geralmente pode ser substituído por ranhura ou linha.

- As posições dos **máximos** são novamente obtidas pela relação:

Máximos de intensidade, fendas múltiplas:

Distância entre fendas — Comprimento de onda

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Ângulo da linha do centro da rede de fendas até região brilhante de ordem m na tela

- Quando uma rede com centenas ou milhares de fendas é iluminada por um feixe de raios paralelos de luz monocromática, a figura obtida é constituída por uma série de linhas agudas em ângulos determinados pela Equação acima.

Rede de difração

- As linhas $m = \pm 1$ são chamadas de linhas de *primeira ordem*, as linhas $m = \pm 2$ são chamadas de linhas de *segunda ordem* e assim por diante.

- Quando a fenda é iluminada com luz branca com uma distribuição contínua de comprimentos de onda, cada valor de m corresponde a um espectro contínuo na figura.

- O ângulo para cada cor é determinado pela Equação $\boldsymbol{d sen\, \theta = m\lambda}$; para um dado valor de m, os comprimentos de onda mais longos (na extremidade vermelha do espectro) são encontrados em ângulos maiores (ou seja, apresentam maior desvio da direção do feixe incidente) que os ângulos dos comprimentos de onda mais curtos da extremidade violeta do espectro.

Rede de difração

$$d sen\,\theta = m\lambda \;\; \rightarrow sen\,\theta \sim \frac{\lambda}{d}$$

- Para que ocorra um desvio substancial, o espaçamento d da rede deve ter a mesma ordem de grandeza do comprimento de onda λ.
- Redes destinadas ao uso da luz visível (λ entre 400 e 700 nm) costumam ter cerca de 1.000 fendas por milímetro;
- O valor de d é dado pelo inverso do número de fendas por unidade de comprimento;
- Portanto, d é da ordem de $1/1000\ mm = 1.000\ nm$.

Rede de difração

- Em uma *rede de reflexão*, o conjunto de fendas igualmente espaçadas representadas é substituído por um conjunto de sulcos ou saliências sobre uma tela refletora.

- A luz refletida forma máximos em ângulos em que a diferença de fase para ondas refletidas em dois sulcos ou saliências adjacentes é igual a um múltiplo inteiro de 2π.

- Quando uma luz de comprimento de onda λ incide perpendicularmente sobre uma rede de reflexão com um espaçamento d entre sulcos ou saliências adjacentes, os ângulos de reflexão em que ocorrem os máximos são dados pela Equação:

$$d sen\,\theta = m\lambda$$

Rede de difração

Sulcos microscópicos na superfície desse disco de DVD agem como uma rede de reflexão, decompondo a luz branca em suas cores componentes (que não podem ser vistas nesta imagem).

- Os “sulcos” são pequenas reentrâncias com profundidade da ordem de $0{,}12\,mm$ sobre a superfície do disco, com um espaçamento radial uniforme de $0{,}74\,mm = 740\,nm$.
- A informação é codificada no DVD mediante a variação do comprimento das reentrâncias.
- O aspecto de rede de reflexão do disco é apenas um efeito paralelo esteticamente agradável.

Rede de difração

Exemplo 9

Os comprimentos de onda das extremidades do espectro visível são aproximadamente $380\ nm$ (violeta) e $750\ nm$ (vermelho).

(a) Calcule a largura angular do espectro visível de primeira ordem produzido por uma rede plana com 600 fendas por milímetro quando uma luz branca incide perpendicularmente sobre a rede.

(b) Os espectros de primeira e segunda ordens se sobrepõem? E os espectros de segunda e terceira ordens? Suas respostas dependem do espaçamento da rede?

Rede de difração

Exemplo 9

SOLUÇÃO: precisamos determinar os ângulos espalhados pelos espectros de primeira, segunda e terceira ordens, que correspondem a m=1, 2 e 3 na Equação

$$d sen\,\theta = m\lambda$$

(a) o espaçamento d da rede é

$$d = \frac{1}{600\ fendas/mm} = 1{,}67 \times 10^{-6} m$$

Rede de difração

Exemplo 9

Para $m = 1$

$$d\ sen\ \theta = m\lambda \ \rightarrow sen\ \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\theta_{v1} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{380 \times 10^{-9} m}{1{,}67 \times 10^{-6} m}\right) = 13{,}2°$$

$$\theta_{r1} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{750 \times 10^{-9} m}{1{,}67 \times 10^{-6} m}\right) = 26{,}7°$$

Ou seja, o espectro visível de primeira ordem aparece com ângulos de deflexão de $\theta_{v1} = 13{,}2°$ (violeta) até $\theta_{r1} = 26{,}7°$ (vermelho).

Rede de difração

Exemplo 9 (b) Com $m = 2$ e $m = 3$,

$$\theta_{v2} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{2(380 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 27{,}1°$$

$$\theta_{v3} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{3(380 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 43{,}0°$$

$$\theta_{r2} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{2(750 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 63{,}9°$$

$$\theta_{r3} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{3(750 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right)$$
$$= arcsen\,(1{,}35) = indefinido$$

Rede de difração

Exemplo 9

(b) Com $m = 2$ e $m = 3$,

$$\theta_{v2} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{2(380 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 27{,}1°$$

$$\theta_{v3} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{3(380 \times 10^{-9}m)}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 43{,}0°$$

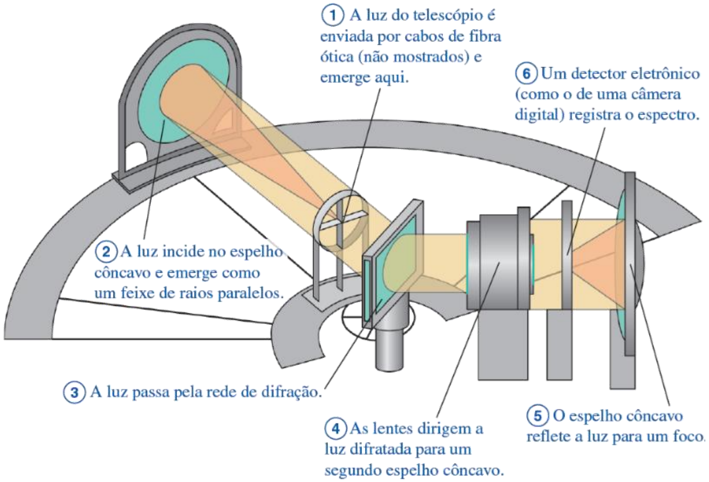
$$\theta_{r1} = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = arcsen\left(\frac{750 \times 10^{-9}m}{1{,}67 \times 10^{-6}m}\right) = 26{,}7°$$

Ou seja, o espectro visível de primeira ordem aparece com ângulos de deflexão de $\theta_{v1\ =\ 13{,}2°}$ (violeta) até $\theta_{r1\ =\ 26{,}7°}$ (vermelho).

Rede de difração

- As redes de difração são amplamente empregadas para medir o espectro da luz emitida por uma fonte, uma técnica chamada de *espectroscopia* ou espectrometria.

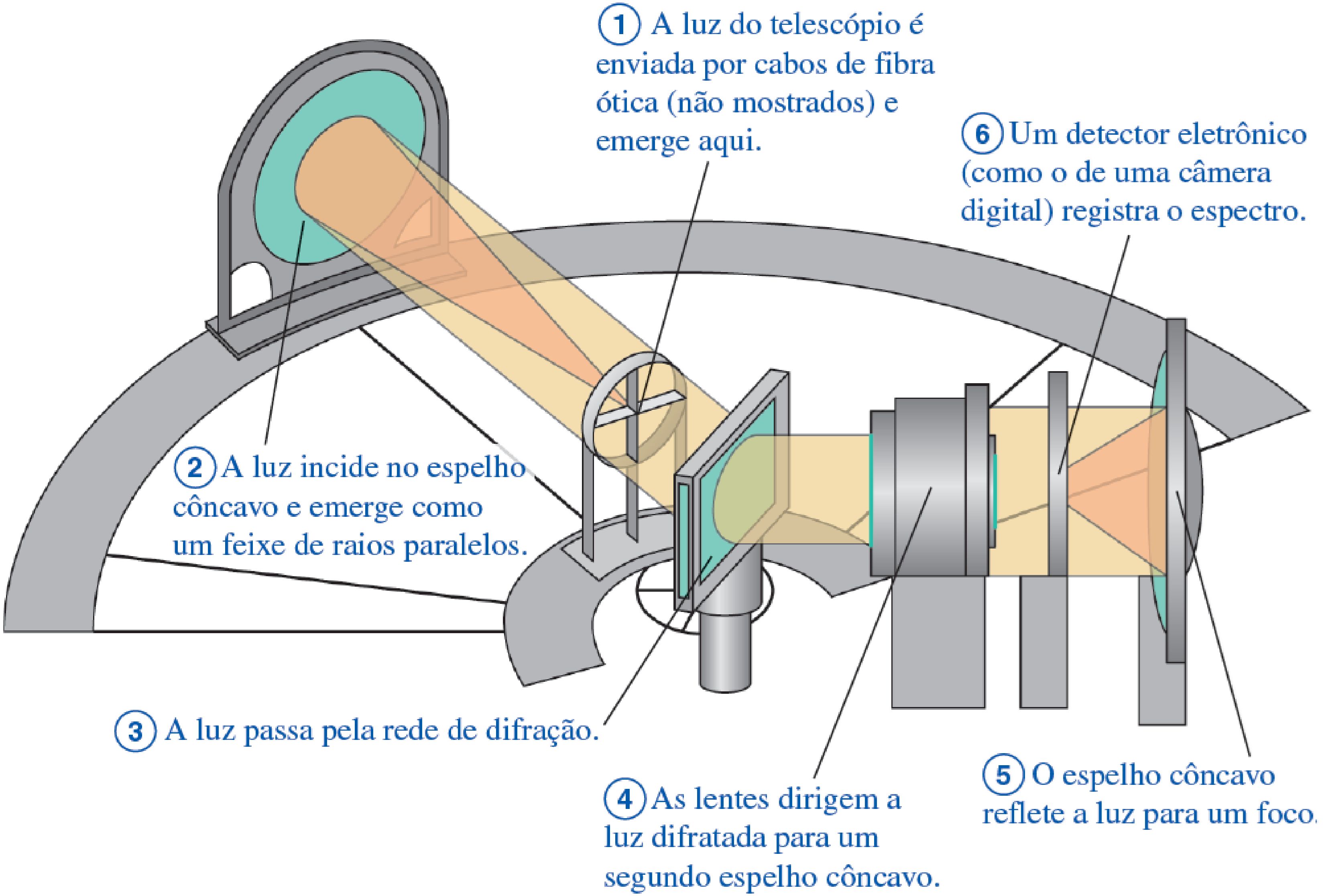
- A figura a seguir mostra o projeto de um espectrômetro de rede usado na astronomia.



- A diferença mínima entre dois comprimentos de onda $\Delta\lambda$ que podem ser distinguidos por um espectrômetro é descrita pelo poder de resolução cromático R, definido por:

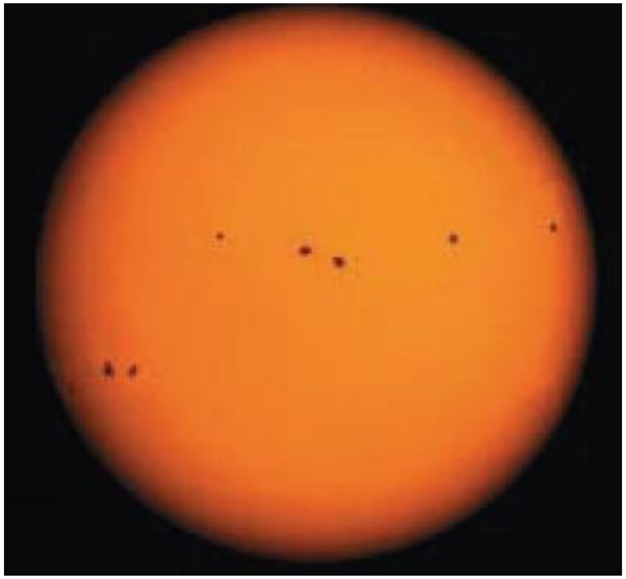
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Rede de difração

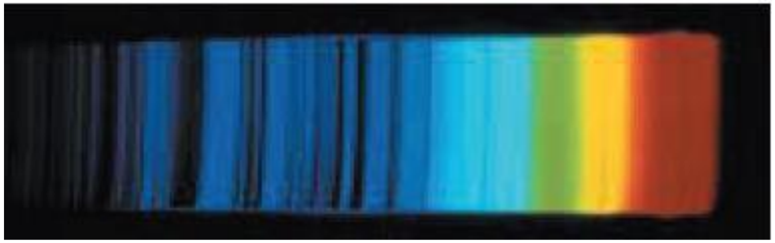


Rede de difração

- Uma importante aplicação dessa técnica é usada na astronomia. À medida que a luz gerada dentro do Sol passa por sua atmosfera, certos comprimentos de onda são absorvidos seletivamente.
- O resultado é que o espectro de luz solar produzido por uma rede de difração apresenta linhas de absorção escuras.



(a) Fotografia do Sol com luz visível.

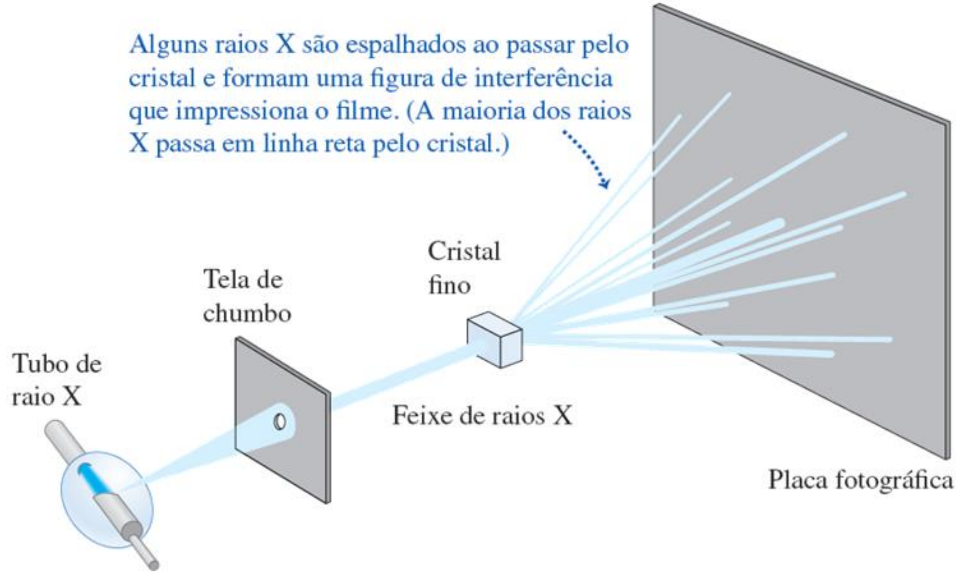


(b) A luz solar se dispersa em um espectro por uma rede de difração. Comprimentos de onda específicos são absorvidos à medida que a luz solar passa pela atmosfera do Sol, deixando linhas escuras no espectro.

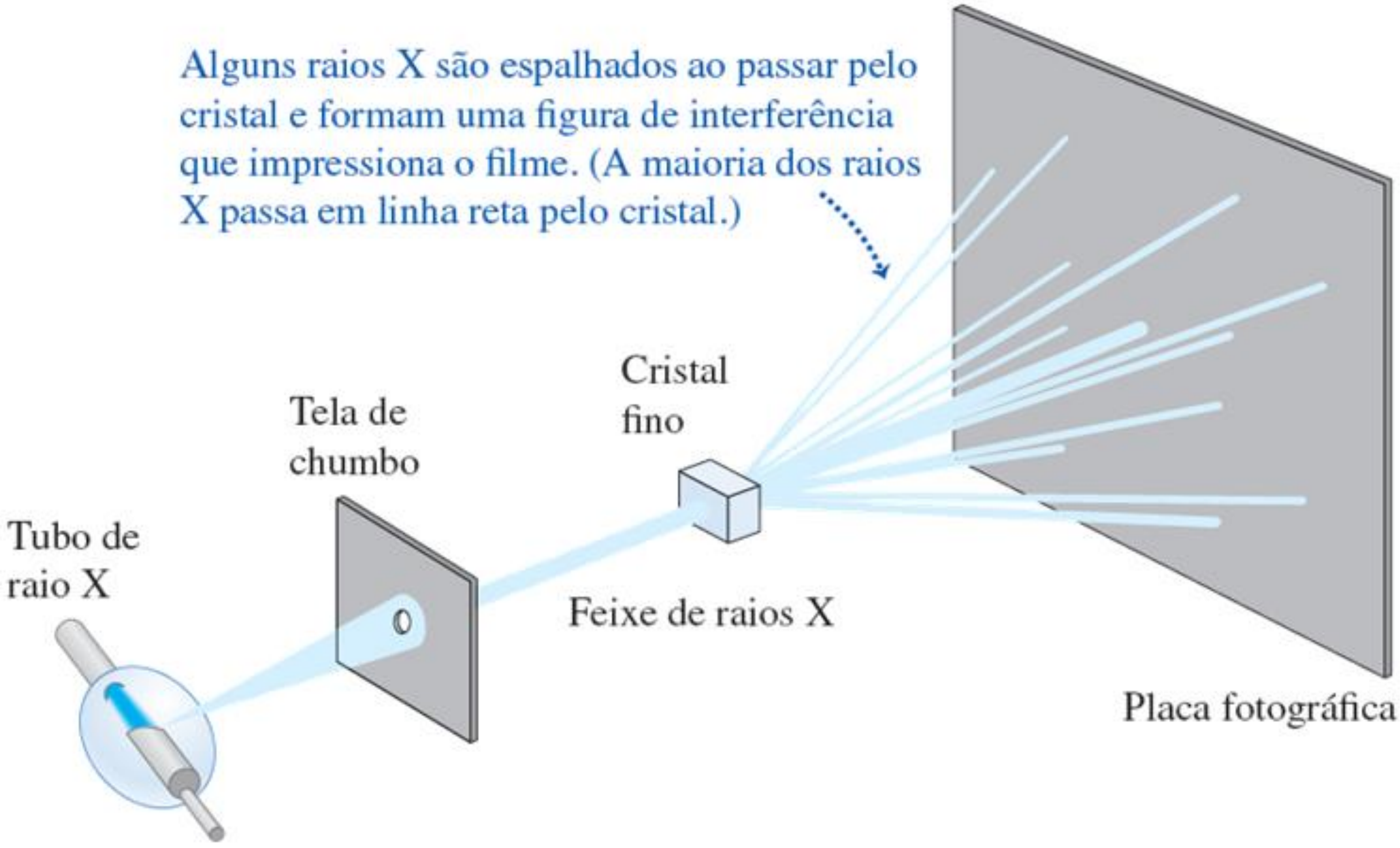
Difração de raios X

- Os raios X foram descobertos em 1895 por Wilhelm Röntgen (1845-1923), e as experiências iniciais sugeriram que se tratava de ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda da ordem de $10^{-10}\ m$.

- As primeiras experiências de difração de raios X foram realizadas em 1912 por Friedrich, Knipping e Von Laue usando o dispositivo experimental esquematizado na Figura.

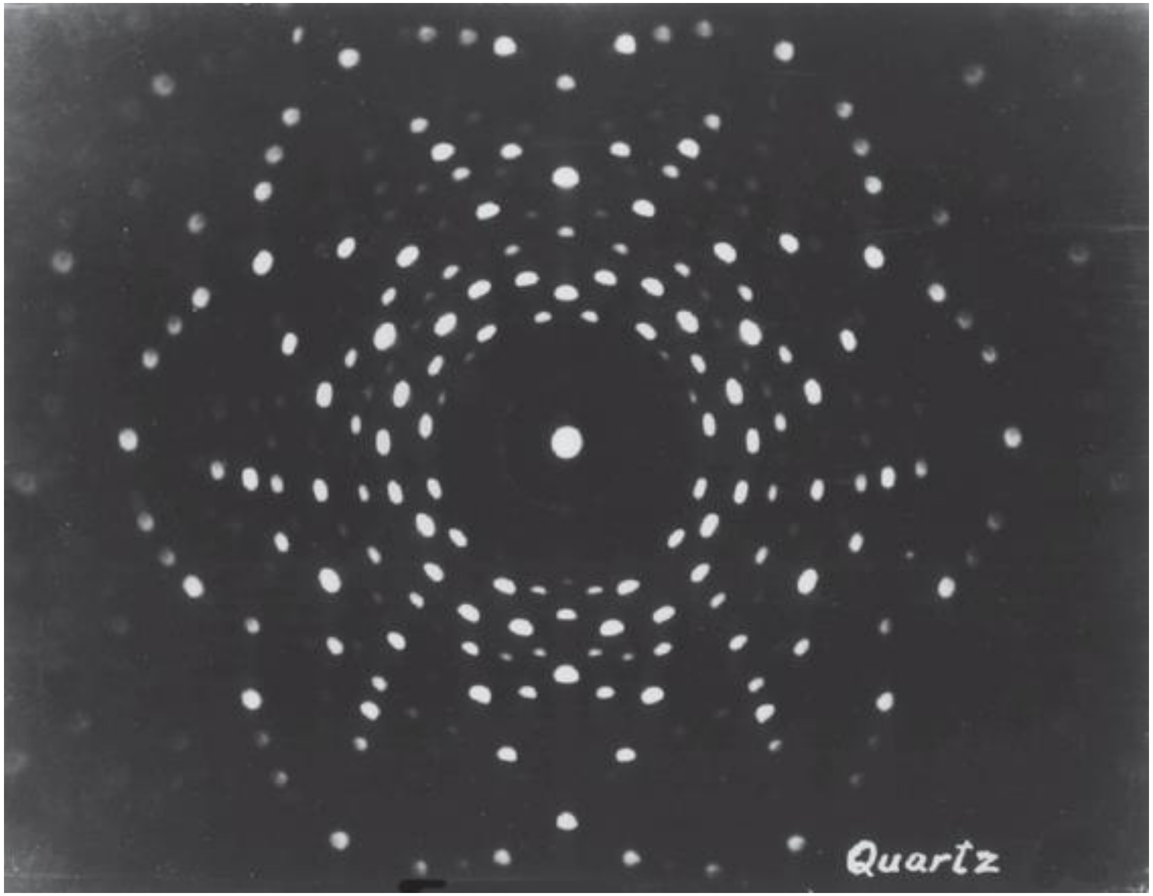


Difração de raios X



Difração de raios X

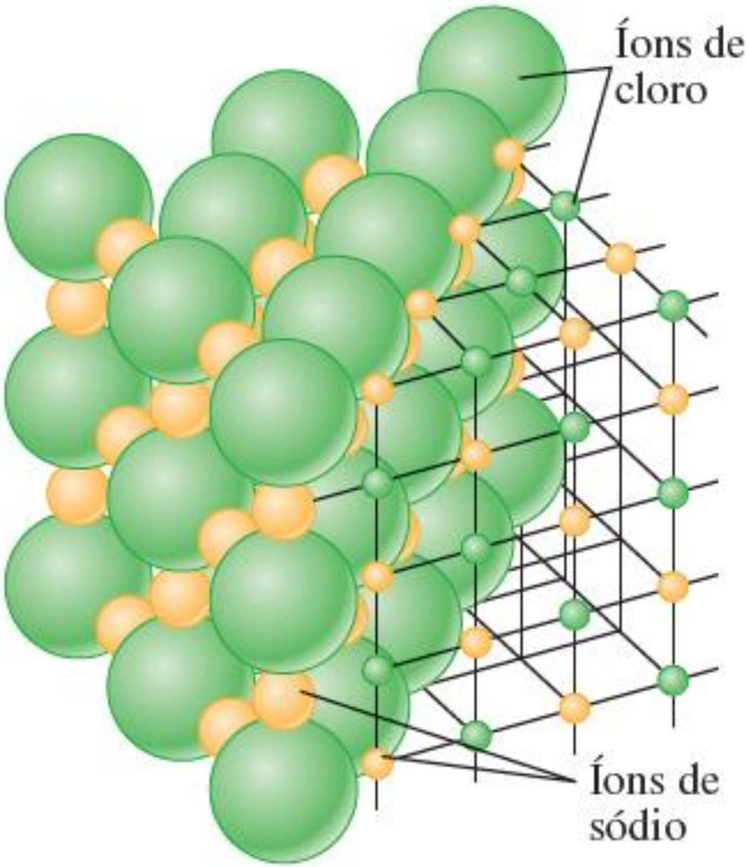
- Os raios X espalhados formaram uma figura de interferência que eles gravaram em uma placa fotográfica. Figura de difração de Laue para uma seção na de cristal de quartzo:



Difração de raios X

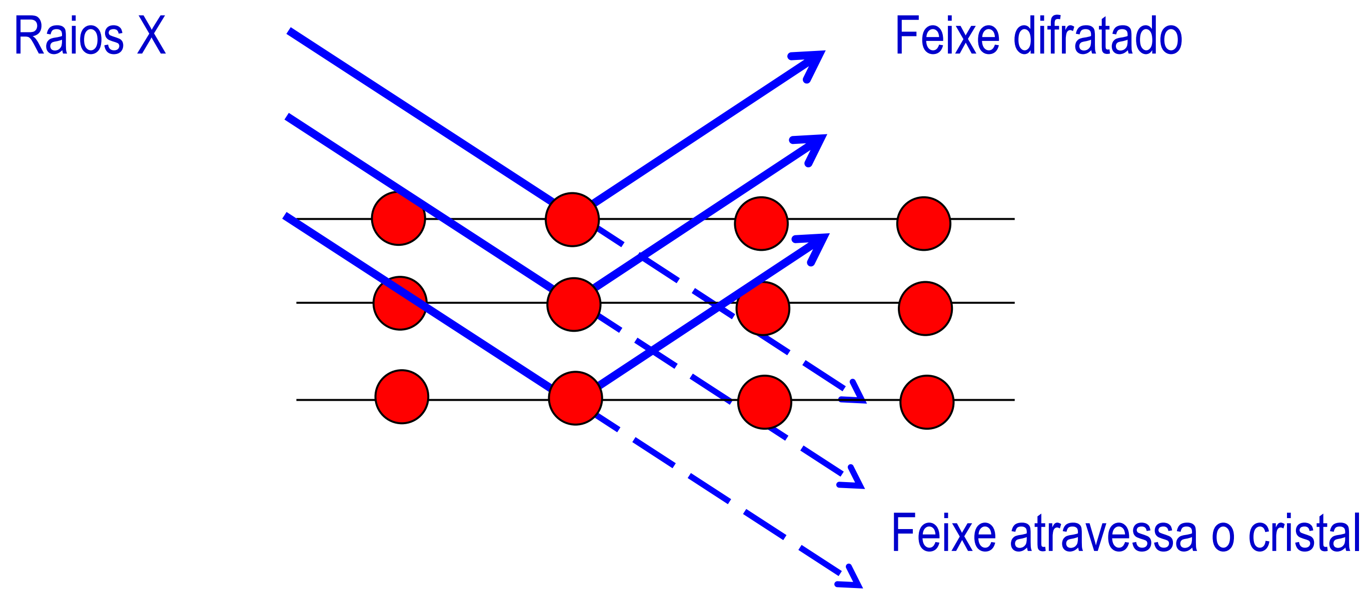
- Tais experiências mostraram que os raios X são ondas ou, pelo menos, possuem propriedades ondulatórias e também que os átomos de um cristal são agrupados em uma rede cristalina regular.

Exemplo: Modelo do arranjo dos íons em um cristal de NaCl (sal de cozinha). O espaçamento de átomos adjacentes é $0{,}282\,nm$. (As nuvens de elétrons dos átomos se superpõem ligeiramente.)

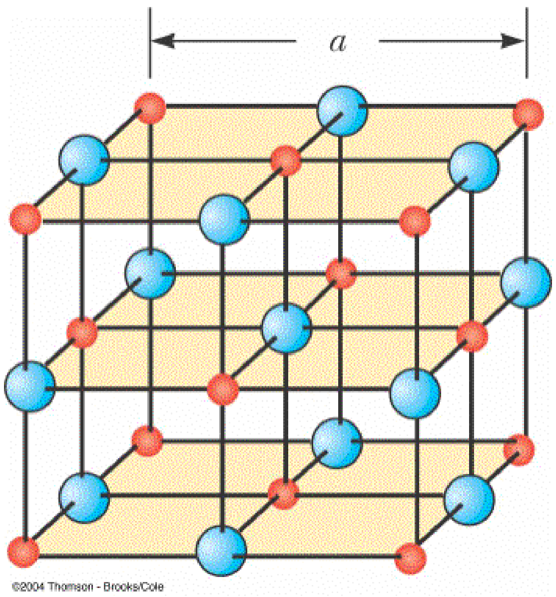


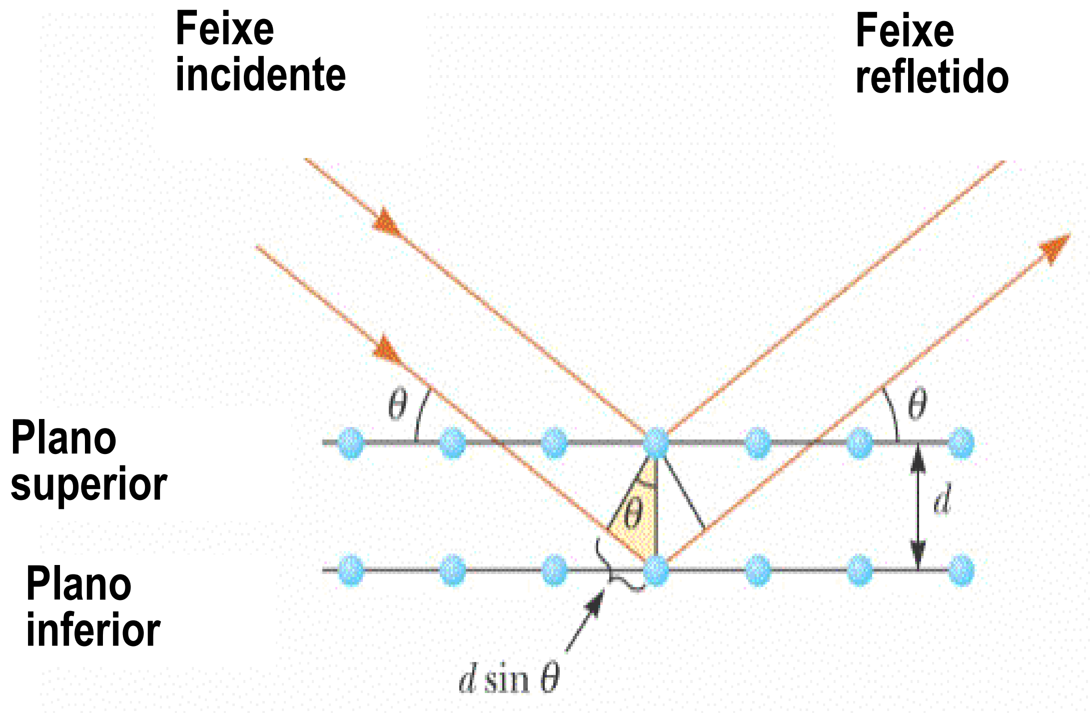
Difração de raios X

- Fenômeno de espalhamento da radiação eletromagnética, provocada pela interação entre o feixe de raios X incidente e os elétrons dos átomos componentes de um material .



Difração de raios X: lei de Bragg (1913)





Condição de Bragg para interferência construtiva de um conjunto:

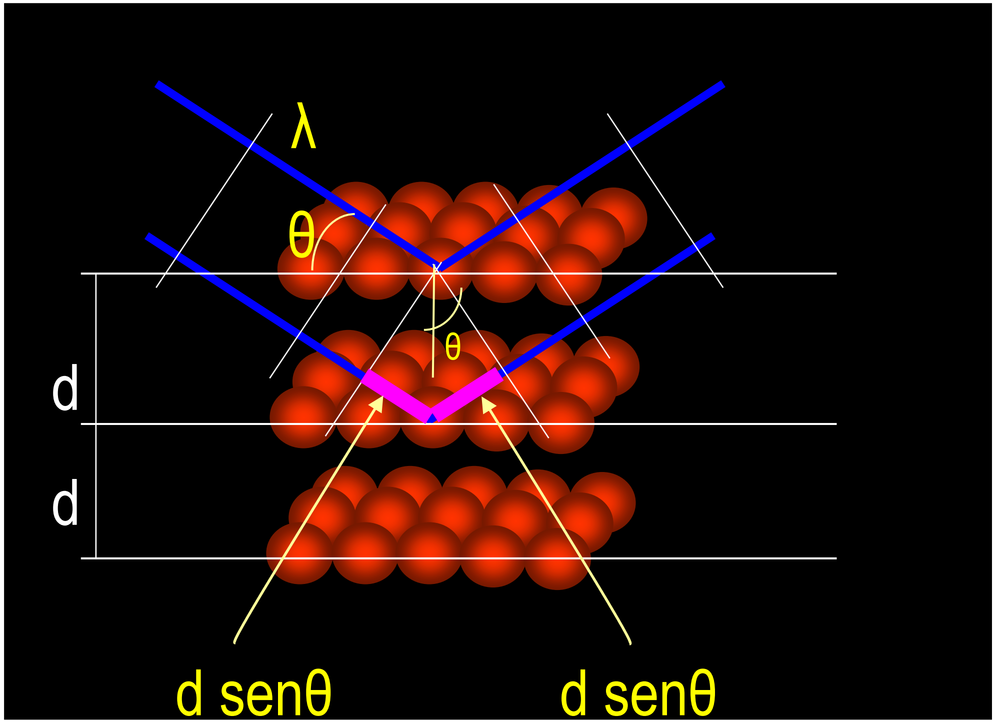
Distância entre linhas adjacentes no conjunto

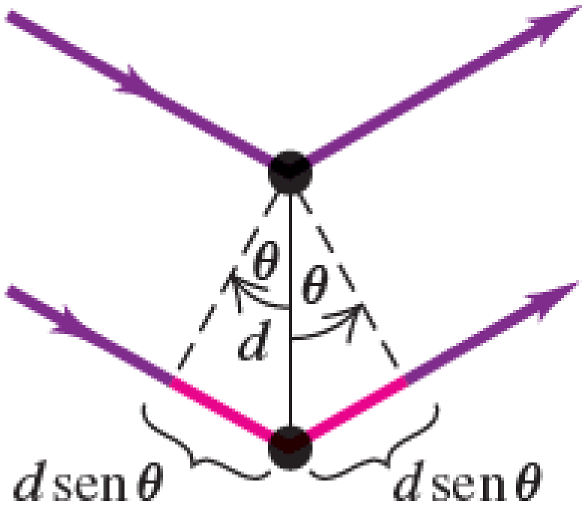
Comprimento de onda

$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ângulo da linha a partir da superfície do conjunto até a região brilhante de ordem m na tela

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)





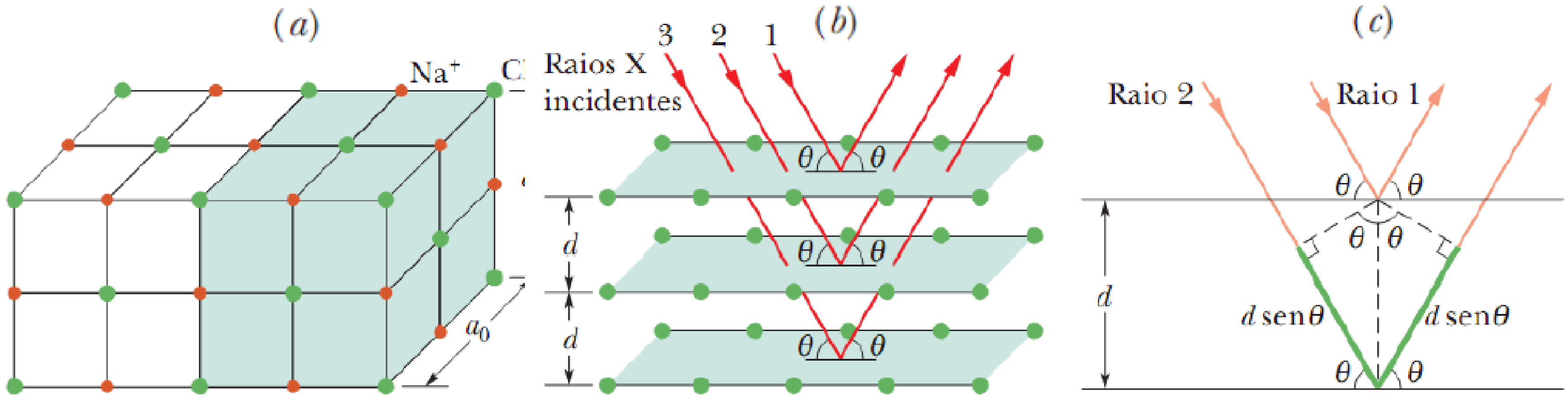
$$m\lambda = \underbrace{2\,d\,sen(\theta)}_{}$$

Diferença dos caminhos e/ raios

- A interferência de átomos em linhas adjacentes é construtiva quando a diferença de caminho $2d\ sen\ \theta$ é igual a um número inteiro de comprimentos de onda.

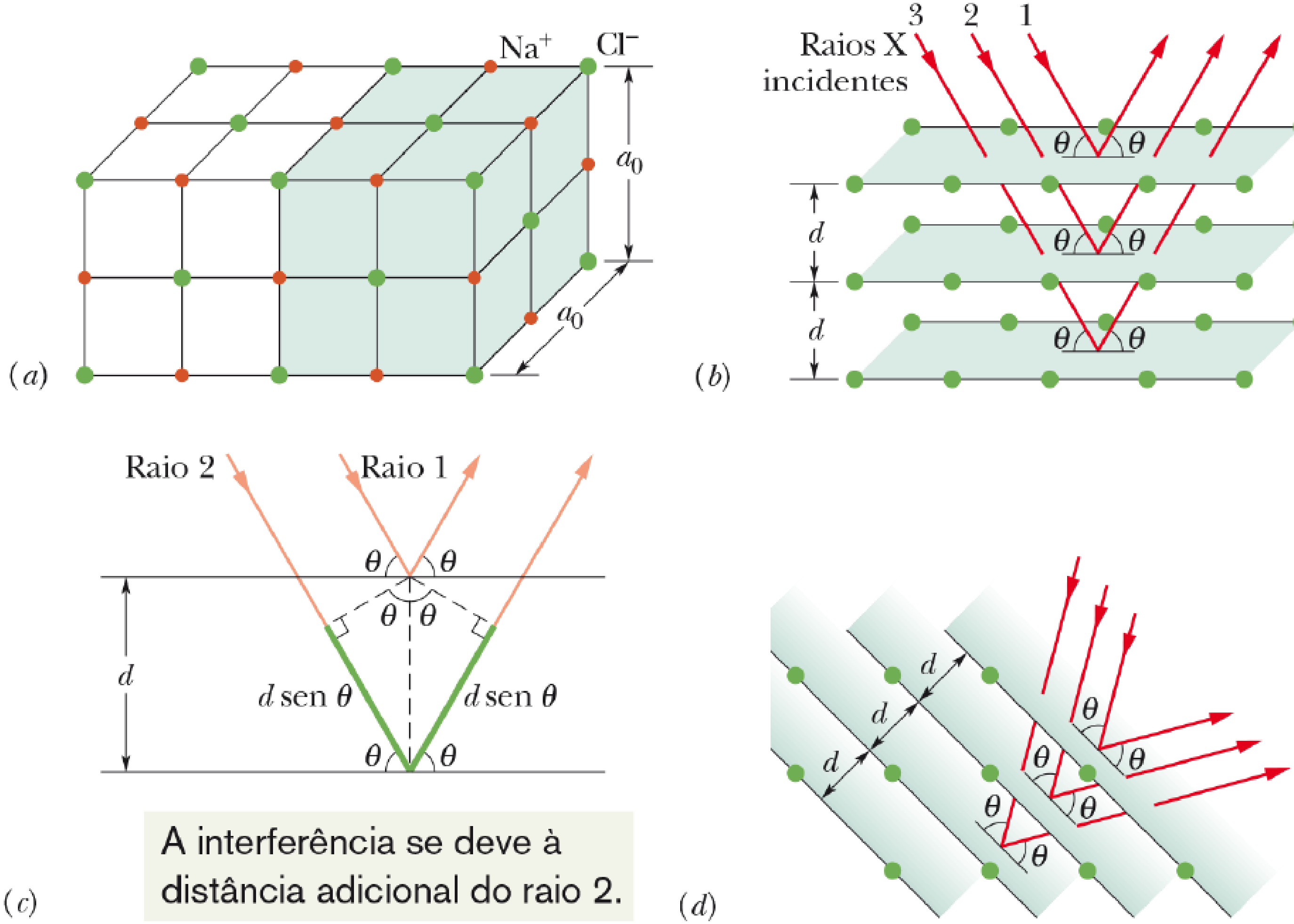
$$2\,d\,sen(\theta) = m\lambda$$

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)



(a) A estrutura cúbica do NaCl, mostrando os íons de sódio e cloro e uma célula unitária (sombreada). (b) Os raios X incidentes são difratados pelo cristal representado em (a). Os raios X são difratados como se fossem refletidos por uma família de planos paralelos, com o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência, ambos medidos em relação aos planos (e não em relação à normal, como na ótica). (c) A diferença de percurso dos raios refletidos por planos vizinhos é $\boldsymbol{2d\ sen\ \theta}$.

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)



(d) Quando o ângulo de incidência muda, os raios X se comportam como se fossem refletidos por outra família de planos.

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)

Exemplo 10

Fazemos um feixe de raios X de comprimento de onda igual a $\lambda = 0{,}154\,nm$ incidir sobre certos planos de um cristal de silício. À medida que se aumenta o ângulo de incidência a partir de zero, você encontra o primeiro máximo forte de interferência entre ondas provenientes de planos do cristal quando o feixe forma com esses planos um ângulo $\theta = 34{,}5°$.

(a) Qual é a distância entre esses planos?

(b) É possível encontrar outros máximos de interferência para ondas provenientes desses planos para ângulos mais elevados?

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)

Exemplo 10 **Solução**:

$$\lambda = 0{,}154\, nm$$

$$\theta = 34{,}5°$$

(a) Explicitamos d na Equação e fazemos $m = 1$:

$$2\, d\, sen(\theta) = m\lambda \rightarrow d = \frac{m\lambda}{2\, sen\, \theta} = \frac{(1)(0{,}154\, nm)}{2\, sen(34{,}5°)} = 0{,}136\, nm$$

(b) Para determinar outros ângulos, explicitamos $sen\, \theta$

$$2\, d\, sen(\theta) = m\lambda \rightarrow sen\theta = \frac{m\lambda}{2\, d} = \frac{m(0{,}154\, nm)}{2\,(0{,}136)} = m(0{,}566)$$

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)

Exemplo 10

$$2\,d\,sen(\theta) = m\lambda \rightarrow sen\theta = \frac{m\lambda}{2\,d} = \frac{m(0{,}154\,nm)}{2\,(0{,}136)} = m(0{,}566)$$

Quando $m \geq 2$, vemos que o $seno\ \theta$ torna-se maior que 1, o que é impossível. Portanto, não existe nenhum outro ângulo para máximos de interferência para esse conjunto particular de planos do cristal

Difração de raios X: lei de Bragg (1913)

Exemplo 11

Raios X de comprimento de onda de $0{,}12\,nm$ sofrem reflexão de segunda ordem em um cristal de fluoreto de lítio para um ângulo de Bragg de 28^o. Qual é a distância interplanar dos planos cristalinos responsáveis pela reflexão?

$$\lambda = 0{,}12\,nm$$

$$m = 2 \;\rightarrow segunda\ ordem$$

$$\theta = 28^0$$

$$2\,d\,sen(\theta) = m\lambda \rightarrow d = \frac{m\lambda}{2\,sen\,\theta} = \frac{(2)(0,12nm)}{2\,sen(28°)} = 0{,}26\,nm$$

Orifícios circulares e poder de resolução

- A figura de difração formada por uma abertura circular é um caso de interesse especial, porque esse fenômeno desempenha um papel muito importante no estudo do limite de resolução de um instrumento ótico.

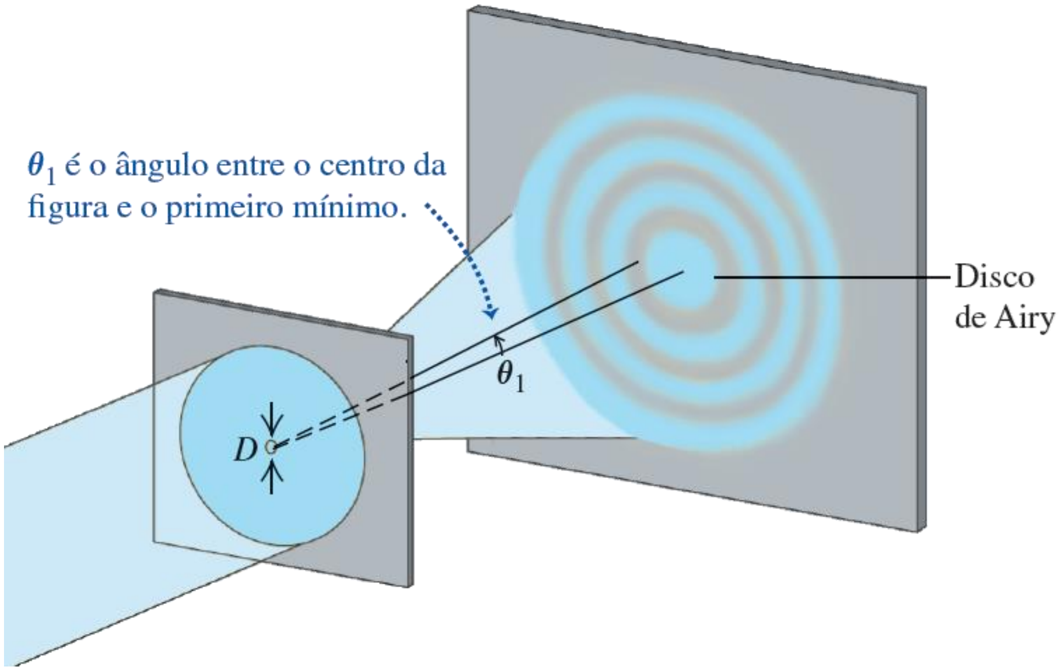
- Em princípio, podemos determinar a intensidade em qualquer ponto P da figura de difração dividindo a área da abertura em pequenos elementos de área; determinamos a amplitude e a fase da onda resultante no ponto P e a seguir integramos sobre a área da abertura para encontrar a amplitude resultante e a intensidade no ponto P.

- Contudo, na prática a integração não pode ser feita a partir de funções elementares. Vamos apenas descrever a figura de difração e citar alguns valores relevantes.

Orifícios circulares e poder de resolução

- Vamos apenas descrever a figura de difração e citar alguns valores relevantes.

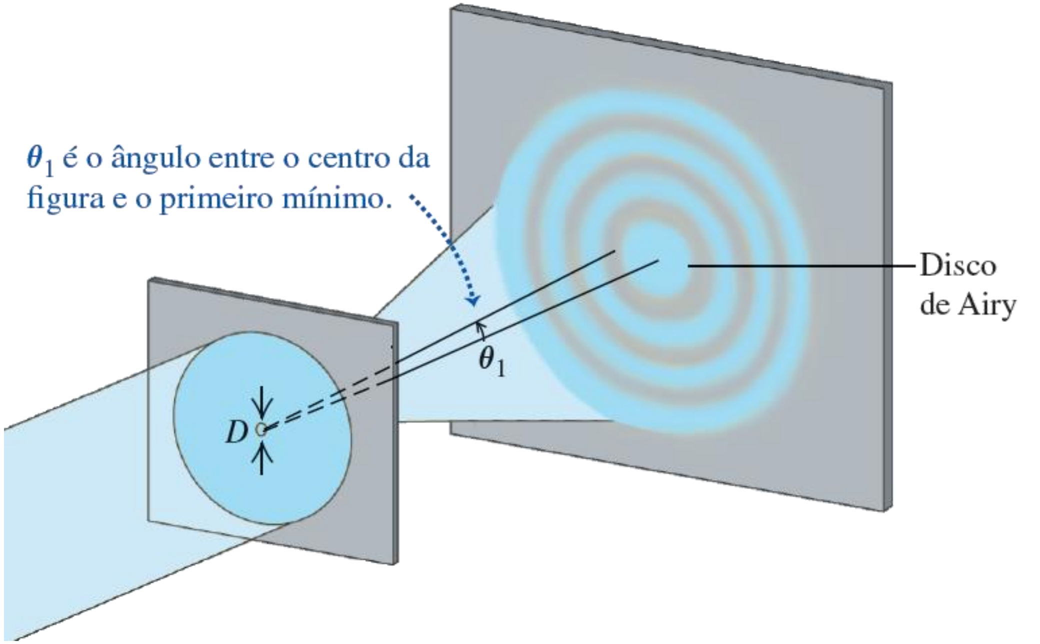
- A figura de difração formada por uma abertura circular (diâmetro D) é constituída por um disco central brilhante circundado por anéis brilhantes e escuros.



Orifícios circulares e poder de resolução

- Podemos descrever a figura em termos do ângulo θ, que representa o raio angular de cada anel. O raio angular θ_1 do primeiro anel escuro é dado por

$$sen\,\theta_1 = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$



Difração em uma abertura circular:

Raio angular do primeiro anel escuro = raio angular do disco de Airy

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$

λ Comprimento de onda

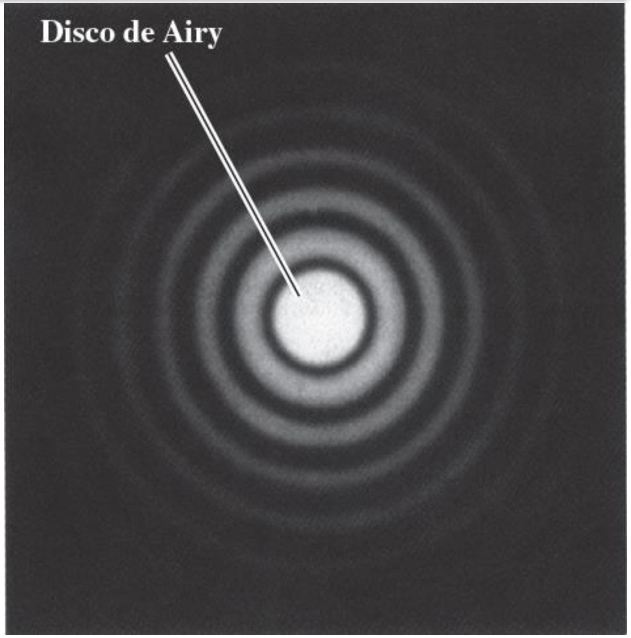
D Diâmetro da abertura

Orifícios circulares e poder de resolução

- Os raios angulares para os dois anéis escuros seguintes são dados por

$$sen\ \theta_2 = 2{,}23\frac{\lambda}{D}$$

$$sen\ \theta_3 = 3{,}24\frac{\lambda}{D}$$

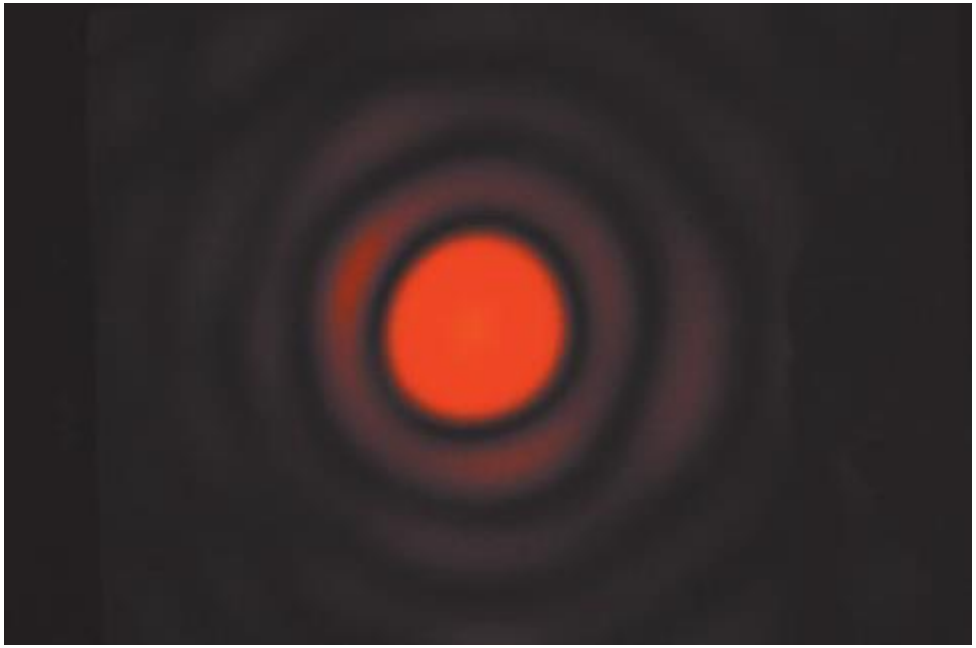


- O círculo central brilhante denomina-se disco de Airy, em homenagem a sir George Airy (1801-1892), que foi o primeiro pesquisador a deduzir a expressão para a intensidade na figura de difração.

- O raio angular do disco de Airy é dado pelo raio angular do primeiro anel escuro, obtido pela $sen\ \boldsymbol{\theta_1} = \mathbf{1{,}22}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{D}}$.

Orifícios circulares e poder de resolução

- Os raios angulares dos três primeiros anéis brilhantes fora do disco de Airy são



$$sen\ \theta_1 = 1{,}63\frac{\lambda}{D}$$

$$sen\ \theta_2 = 2{,}68\frac{\lambda}{D}$$

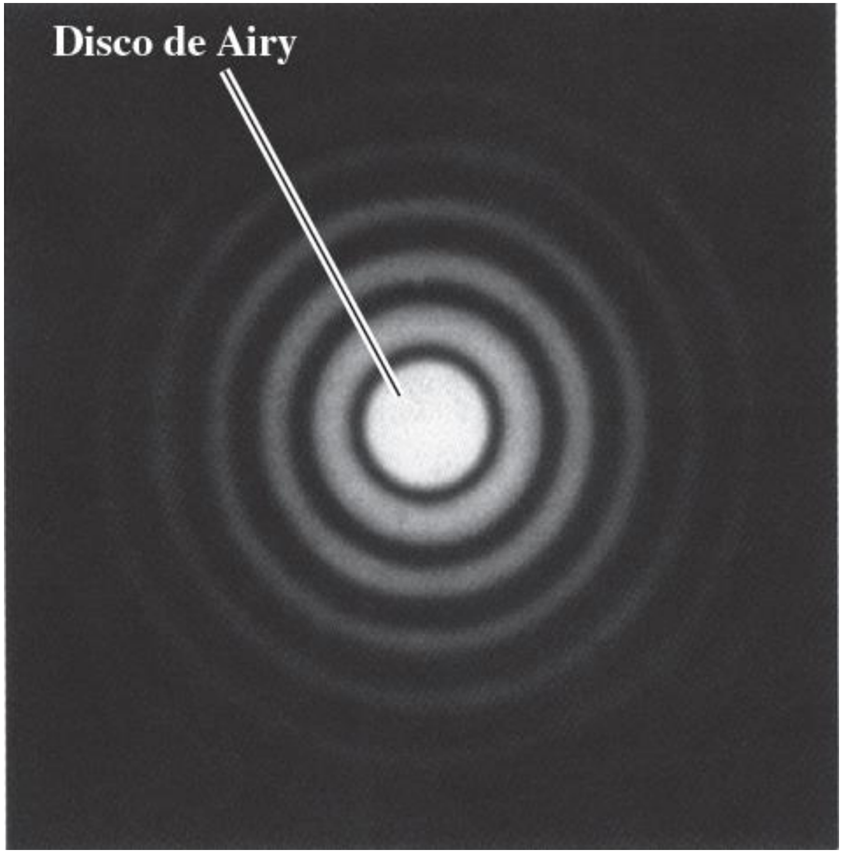
$$sen\ \theta_3 = 3{,}70\frac{\lambda}{D}$$

- As intensidades dos anéis brilhantes caem muito rapidamente, à medida que o raio angular aumenta.

Orifícios circulares e poder de resolução

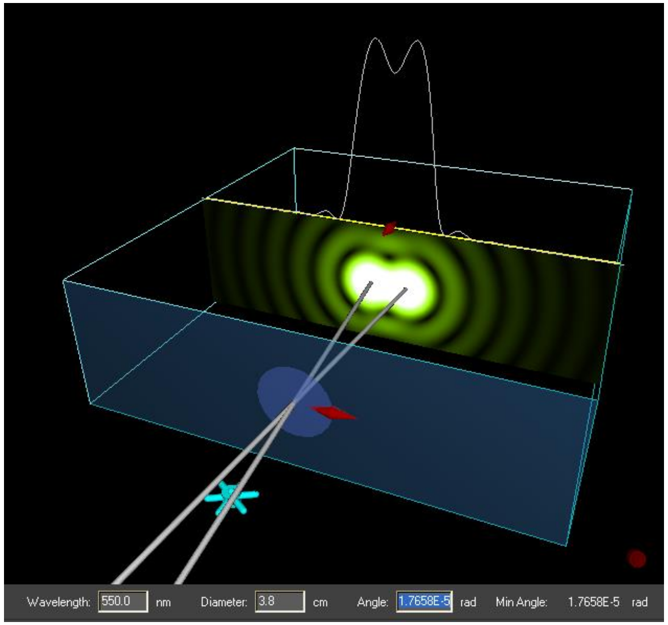
- Quando D é muito maior que o comprimento de onda λ, o que geralmente ocorre nos instrumentos de ótica, a intensidade do primeiro anel brilhante se reduz a $1{,}7\%$ da intensidade do disco de Airy e a intensidade do segundo anel brilhante cai para apenas $0{,}4\%$.

- Quase toda a energia incidente (85%) permanece dentro do disco de Airy.



Orifícios circulares e poder de resolução

➢ Critério de resolução de Rayleigh



- A mínima separação angular possível de ser resolvida ou o limite angular de resolução é:

$$sen\,\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \rightarrow \theta_R = arcsen\frac{1{,}22\lambda}{D}$$

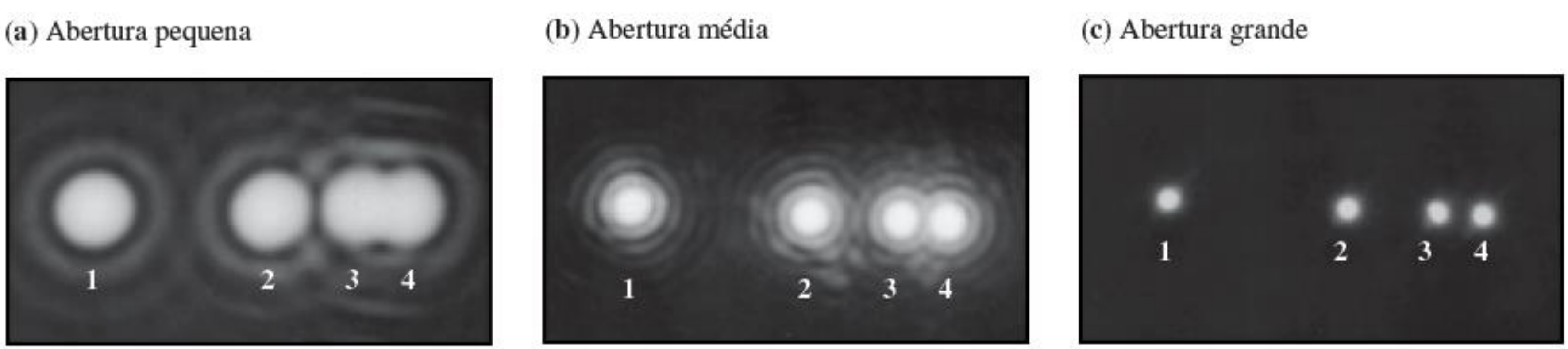
- O máximo do disco de Airy de uma das fontes coincide com o primeiro mínimo do padrão de difração da outra fonte. Como ângulos são pequenos:

$$\boxed{\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{D}}$$

Orifícios circulares e poder de resolução

➢ Critério de resolução de Rayleigh

- Quando focalizamos dois objetos puntiformes, suas figuras de difração se sobrepõem;
- Quando os objetos estão muito próximos, suas figuras de difração se superpõem quase completamente, e não podemos distingui-los.
- Figuras de difração formadas por quatro fontes “puntiformes” muito pequenas.

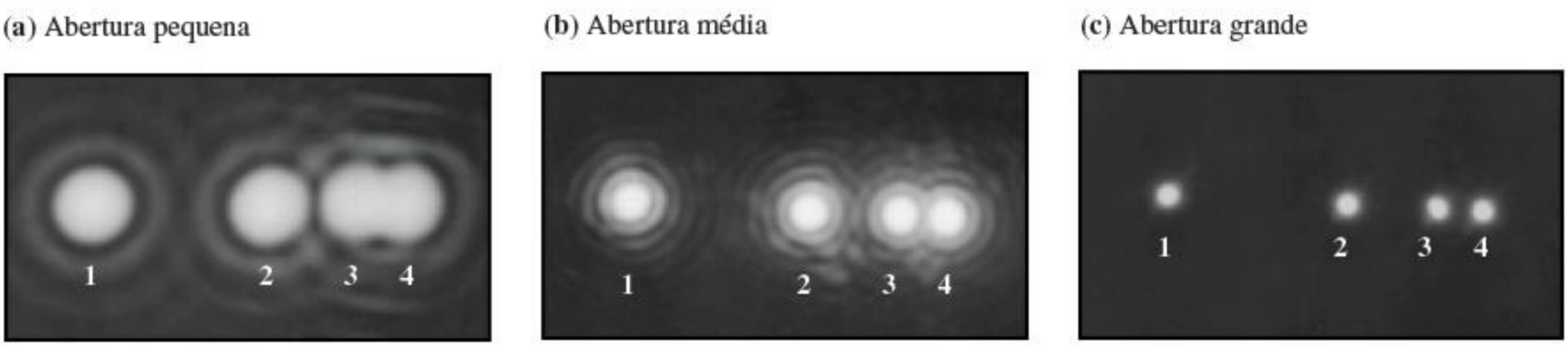


Figuras de difração formadas por quatro fontes “puntiformes” muito pequenas.

Orifícios circulares e poder de resolução

➢ Critério de resolução de Rayleigh

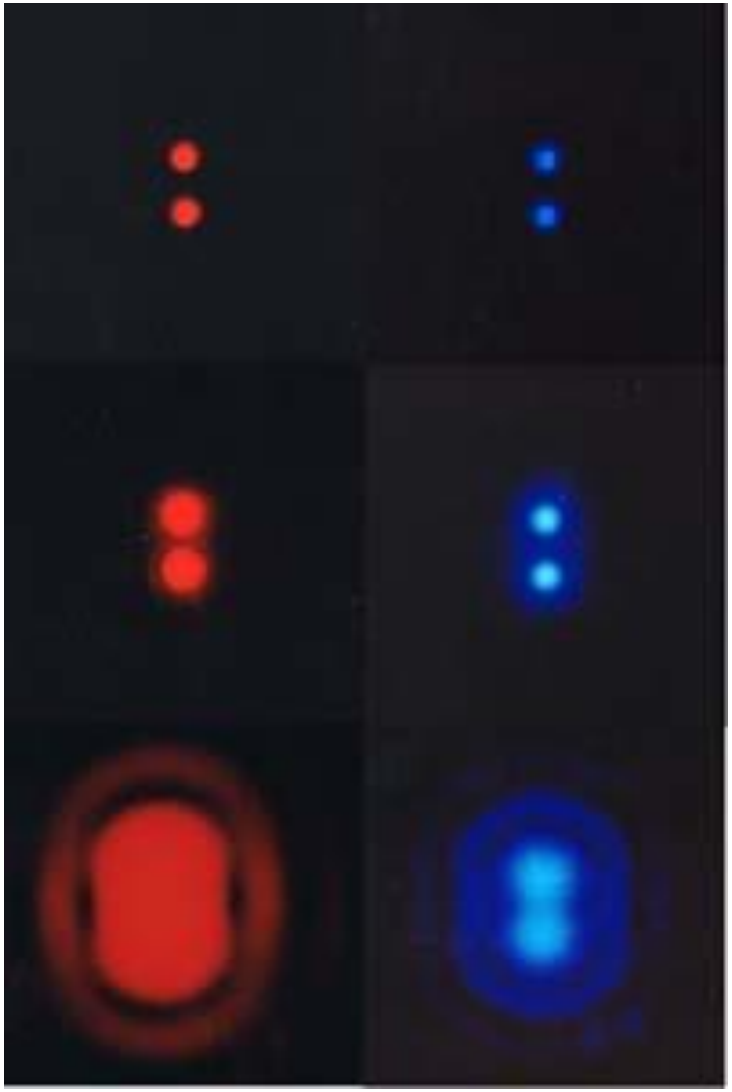
- (a) Aqui a abertura é tão pequena que as figuras das fontes 3 e 4 se superpõem e estão quase atingindo o limite de resolução dado pelo critério de Rayleigh.
- Aumentando-se o diâmetro da abertura, a figura de difração diminui de tamanho, como mostrado em (b) e em (c).



Figuras de difração formadas por quatro fontes "puntiformes" muito pequenas.

Orifícios circulares e poder de resolução

➢ Critério de resolução de Rayleigh



$$\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

$$\lambda_{vermelho} > \lambda_{violeta}$$

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 12

Suponha que você mal consiga resolver dois pontos vermelhos por causa da difração na pupila do olho. Se a iluminação ambiente aumentar, fazendo a pupila diminuir de diâmetro, será mais fácil ou mais difícil distinguir os pontos? Considere apenas o efeito da difração.

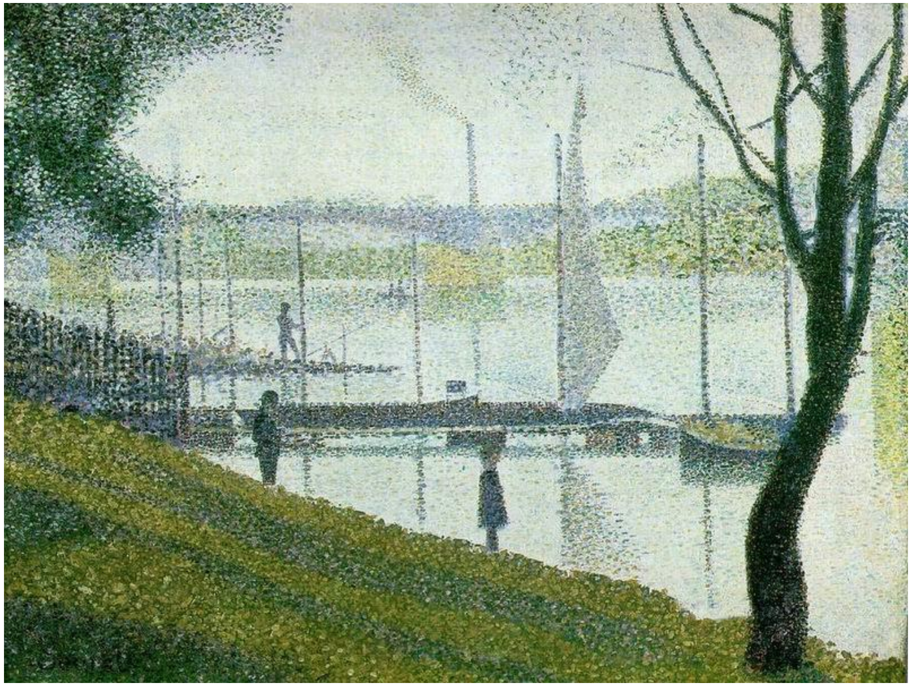
Lembrando:

$$\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Portanto diminuindo D ficaria mais difícil resolver as duas fontes.

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 13



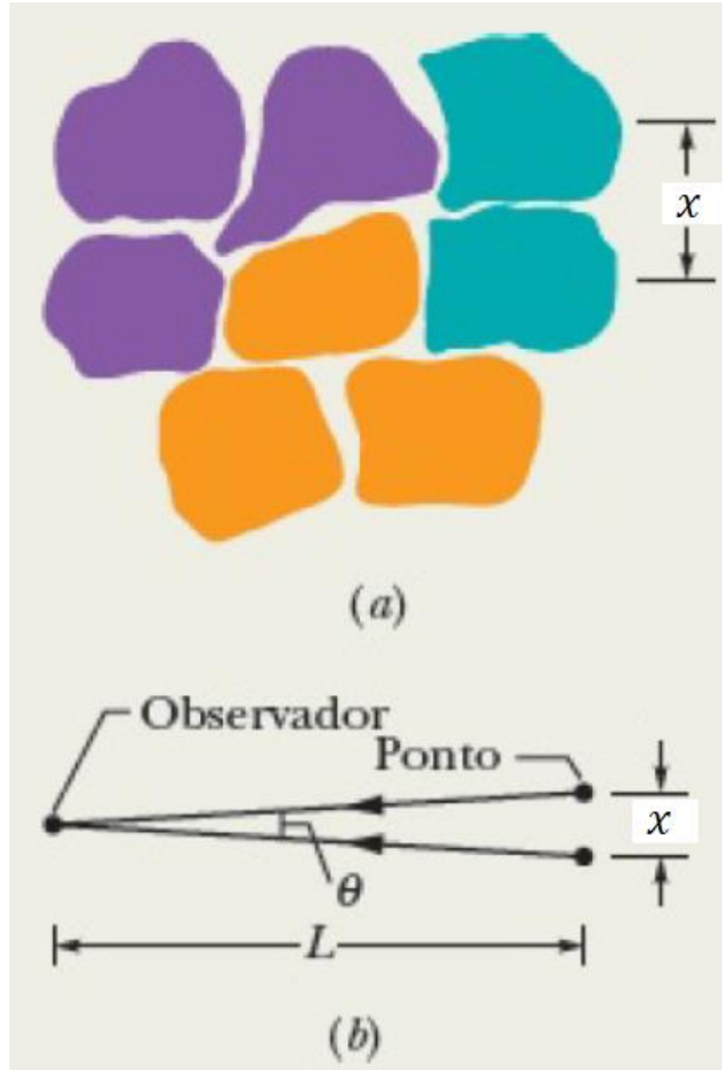
Le Pont de Courbevoie 1886-1887

O pintor neoimpressionista Georges Seurat (final do século XIX) pertencia à escola do pontilhismo. Suas obras consistiam em um enorme número de pequenos pontos igualmente espaçados (aprox. $2{,}54\ mm$) de pigmento puro.

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 13

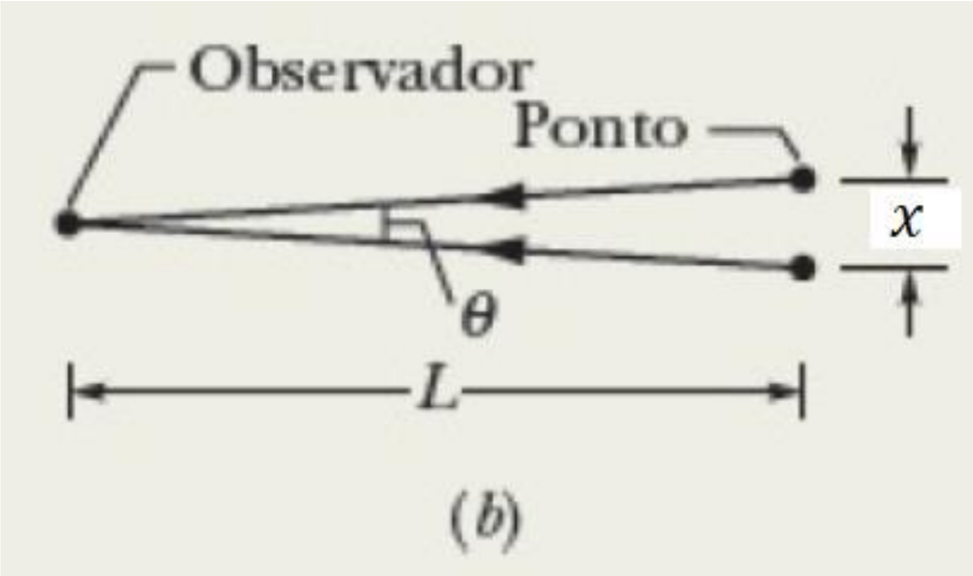
A Figura é uma vista ampliada dos pontos coloridos de uma pintura pontilhista. Suponha que a distância média entre os centros dos pontos é $x = 2{,}0\ mm$. Suponha também que o diâmetro da pupila do olho do observador é $d = 1{,}5\ mm$ e que a menor separação angular entre os pontos que o olho pode resolver é dada pelo critério de Rayleigh. Qual é a menor distância de observação na qual os pontos não podem ser resolvidos para nenhuma cor?



Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 13

$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$



Como ângulos são pequenos:

$$\theta = \frac{x}{L}$$

Igualando as equações, temos:

$$\frac{x}{L} = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \rightarrow L = \frac{xD}{1{,}22\lambda}$$

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 13

$$L = \frac{xD}{1{,}22\lambda}$$

Quanto menor o valor de λ, maior o valor de L. Assim, quando o observador se afasta da pintura, os pontos vermelhos (a cor de maior comprimento de onda) se tornam indistinguíveis antes dos pontos azuis. Para calcular a menor distância L na qual os pontos não podem ser resolvidos para nenhuma cor, fazemos $\lambda = 400\ nm$ (menor comprimento da luz visível, correspondente ao violeta).

$$L = \frac{xD}{1{,}22\lambda} = \frac{(2 \times 10^{-3} m)(1{,}5 \times 10^{-3} m)}{(1{,}22) \times (400 \times 10^{-9} m)} = 6{,}1m$$

A essa distância ou a uma distância maior, as cores dos pontos vizinhos se misturam; a cor percebida em cada região do quadro é uma cor que pode não existir na pintura.

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 14

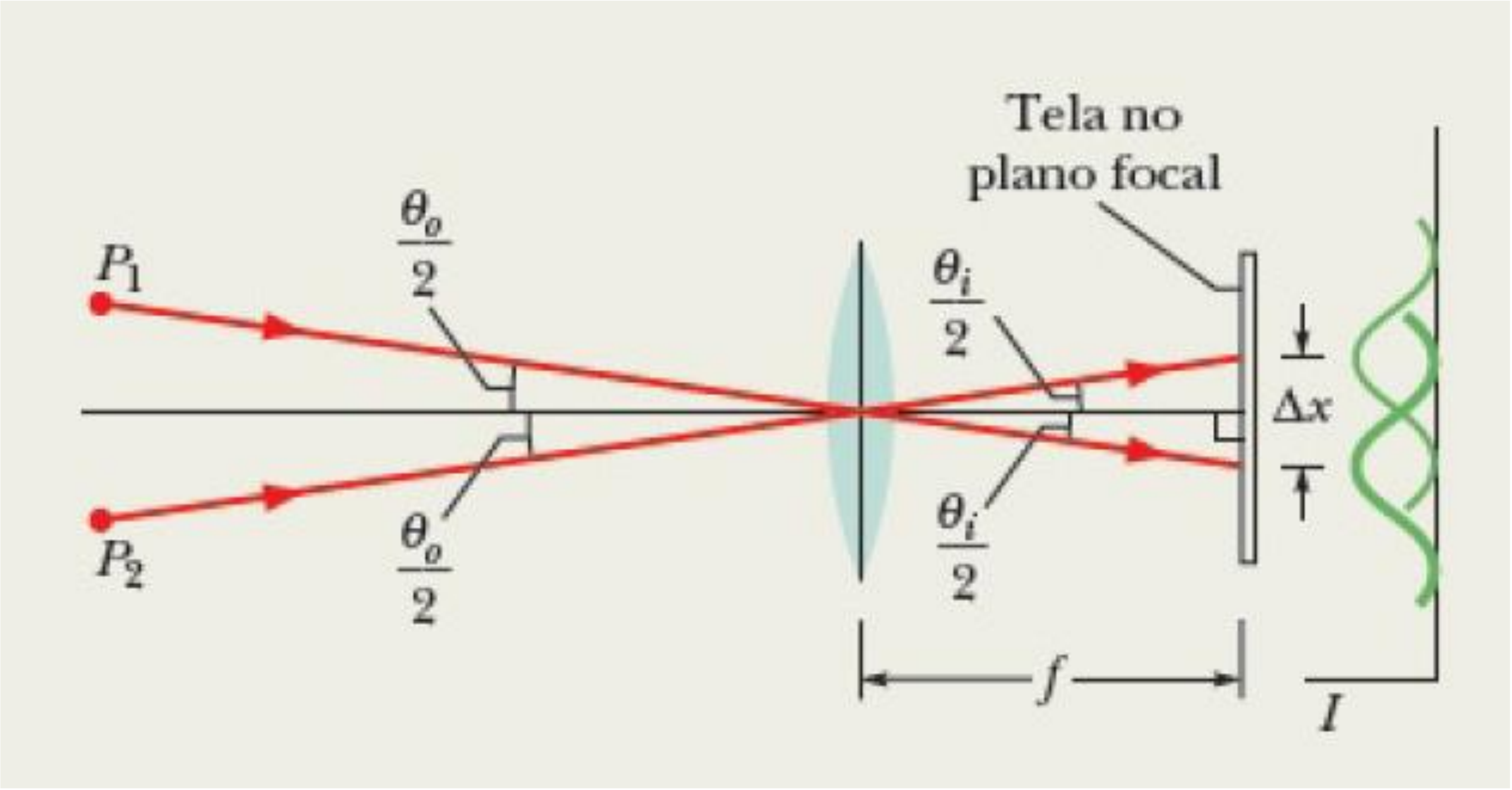
Uma lente convergente circular, de diâmetro $D = 32\,mm$ e distância focal $f = 24\,cm$, forma imagens de objetos pontuais distantes no plano focal da lente. O comprimento de onda da luz utilizada é $\lambda = 550\,nm$.

(a) Considerando a difração introduzida pela lente, qual deve ser a separação angular entre dois objetos pontuais distantes para que o critério de Rayleigh seja satisfeito?

(b) Qual é a separação Δx dos centros das imagens no plano focal? (Ou seja, qual é a separação dos picos das duas curvas?)

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 14



$$\theta_o = separação\ angular\ do\ objeto$$
$$\theta_i = separação\ angular\ da\ imagem$$

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 14

(a) Qual deve ser a separação angular entre dois objetos pontuais distantes para que o critério de Rayleigh seja satisfeito?

$D = 32\,mm$

$f = 24\,cm$

$\lambda = 550\,nm.$

Para que as imagens satisfaçam ao critério de Rayleigh, as separações angulares dos dois lados da lente devem ser dadas pela equação $\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$ (supondo ângulos pequenos).

$$\theta_o = \theta_i = \theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} = \frac{(1{,}22)(550 \times 10^{-9} m)}{32 \times 10^{-3}} = 2{,}1 \times 10^{-5} rad$$

Orifícios circulares e poder de resolução

Exemplo 14

(b) Qual é a separação Δx dos centros das imagens no plano focal? (Ou seja, qual é a separação dos picos das duas curvas?)

$D = 32\,mm$

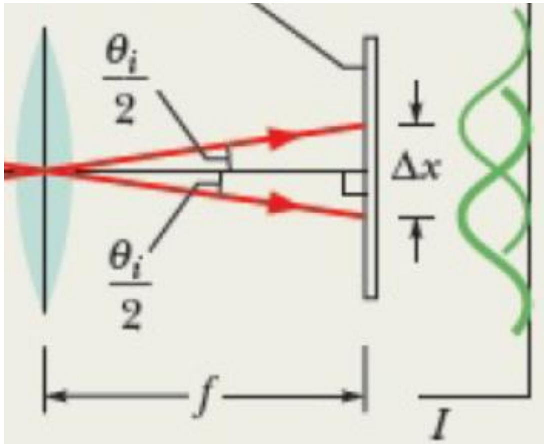
$f = 24\,cm$

$\lambda = 550\,nm.$

Analisando o triângulo formado por um dos raios, o eixo central e a tela na Figura , vemos que tan $\theta i/2 = \Delta x/2f$. Explicitando Δx e supondo que o ângulo θ é suficientemente pequeno para que $\tan\theta \approx \theta$, obtemos

$$\theta_i = \frac{\Delta x}{f} \rightarrow \Delta x = f\theta_i$$

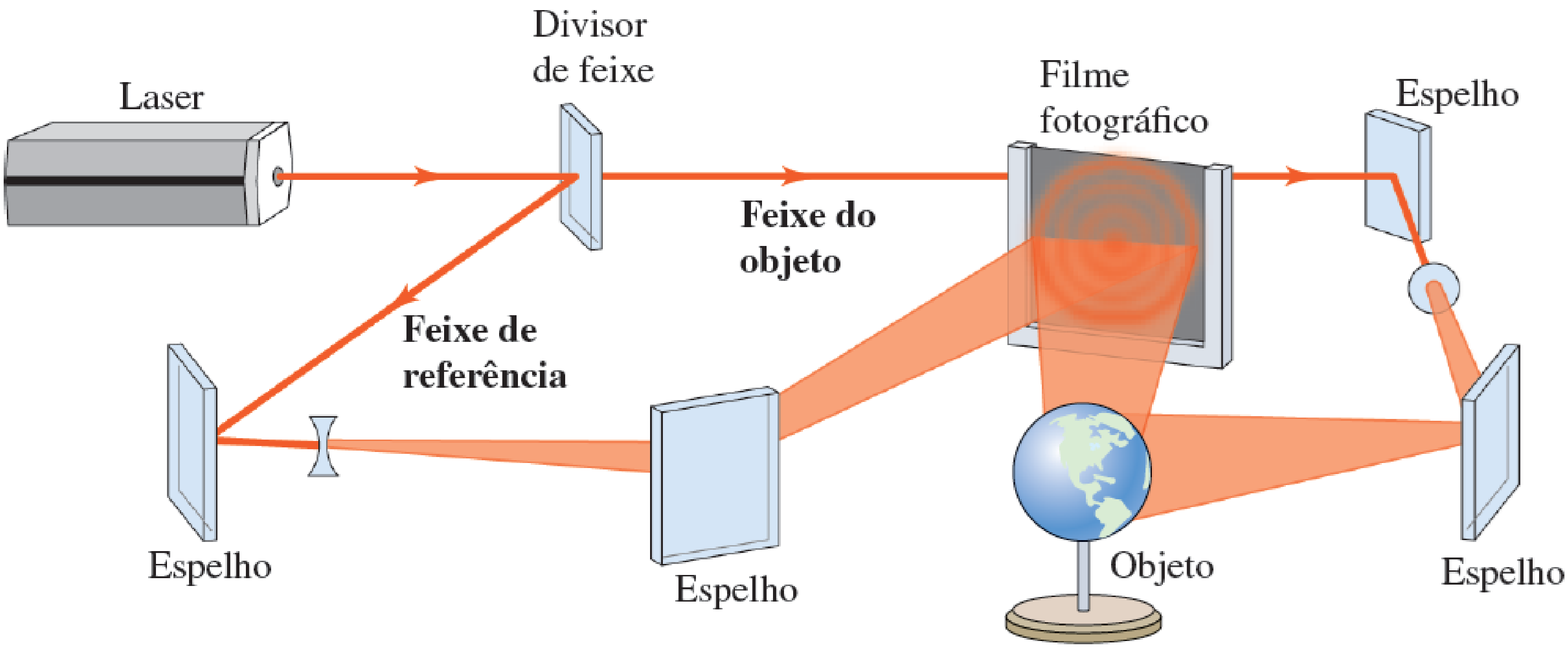
$$\Delta x = f\theta_i = (0{,}24\,m)(2{,}1 \times 10^{-5} rad) = 5{,}0\mu m$$



Holografia

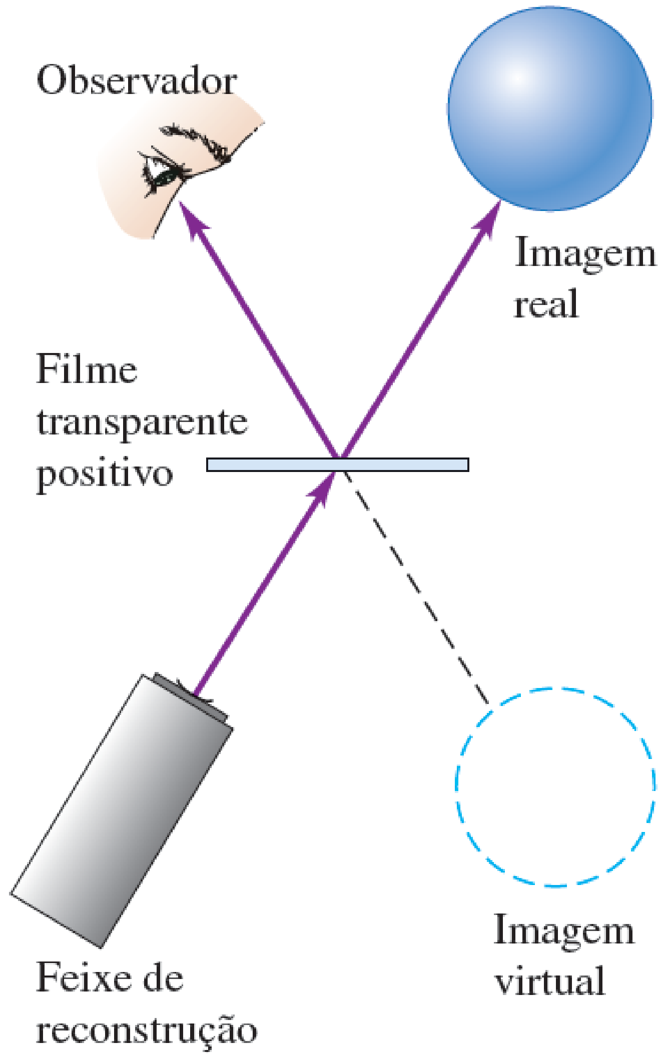
➢ A holografia é uma técnica para registrar e reproduzir a imagem de um objeto a partir de efeitos de interferência.

➢ Gravando um holograma:



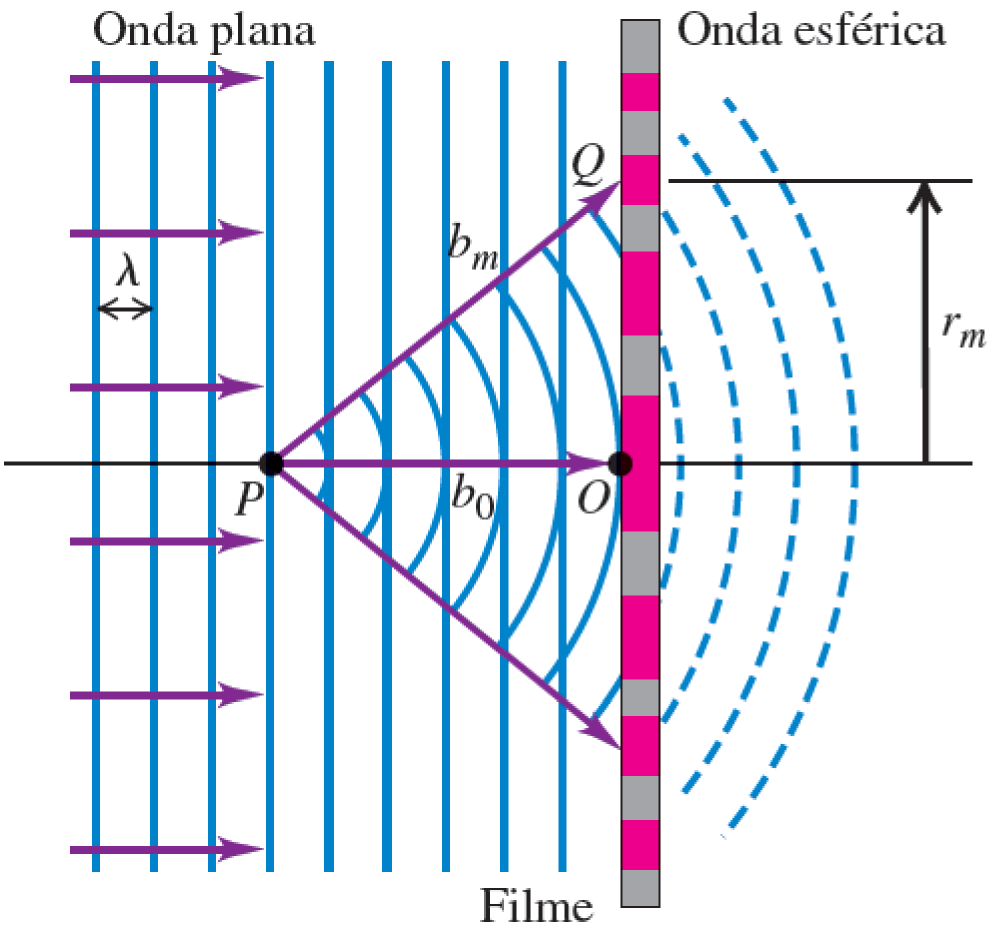
Holografia

- Vendo o holograma:



Holografia

- A interferência construtiva entre uma onda plana e uma onda esférica ocorre em todo ponto Q sobre o filme para o qual a diferença entre a distância b_m até P e a distância b_0 entre P e O é um número inteiro de comprimentos de onda $m\lambda$. No ponto Q indicado, $m = 2$



Holografia

- Quando uma onda plana incide sobre uma cópia transparente positiva do filme revelado, a onda difratada é constituída por uma onda que converge para P' e a seguir diverge novamente, com uma onda divergente que parece se originar no ponto P.

- Essas ondas formam, respectivamente, uma imagem real e uma imagem virtual.