Mecânica Analítica

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE

PELOTAS

REVISÃO

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

➢ Vínculos

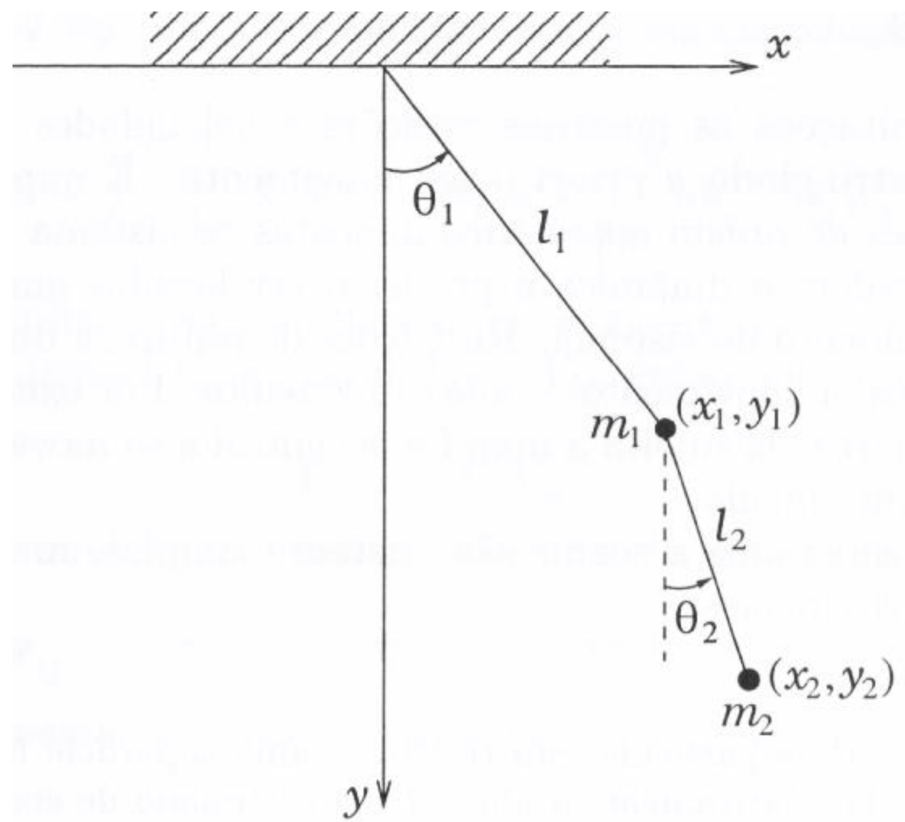
São limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento.

- É importante salientar que os *vínculos* são limitações *de ordem cinemática* impostas ao sistema mecânico.
- As restrições antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema.
- Restrições de natureza dinâmica – decorrentes, portanto das equações de movimento – *não são vínculos*.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 1: Um pêndulo duplo oscila num plano vertical fixo. As equações de vinculo são

$$x^2 + y^2 - l_1{}^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2{}^2 = 0$$



$$x^2 + y^2 = l_1{}^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2{}^2$$

Dinâmica Lagrangiana

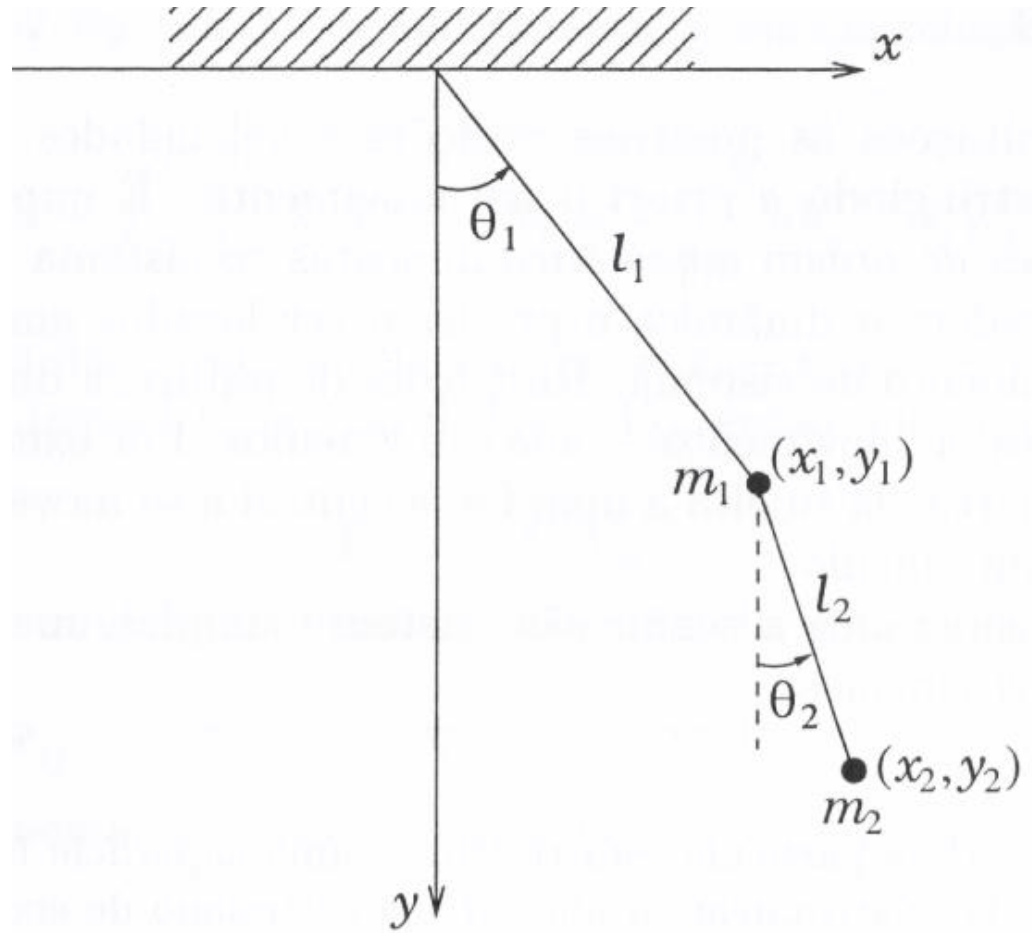
Exemplo 2: Escreva as equações de transformação o pêndulo duplo

$$x_1 = l_1\, sin\, \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

$$y_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

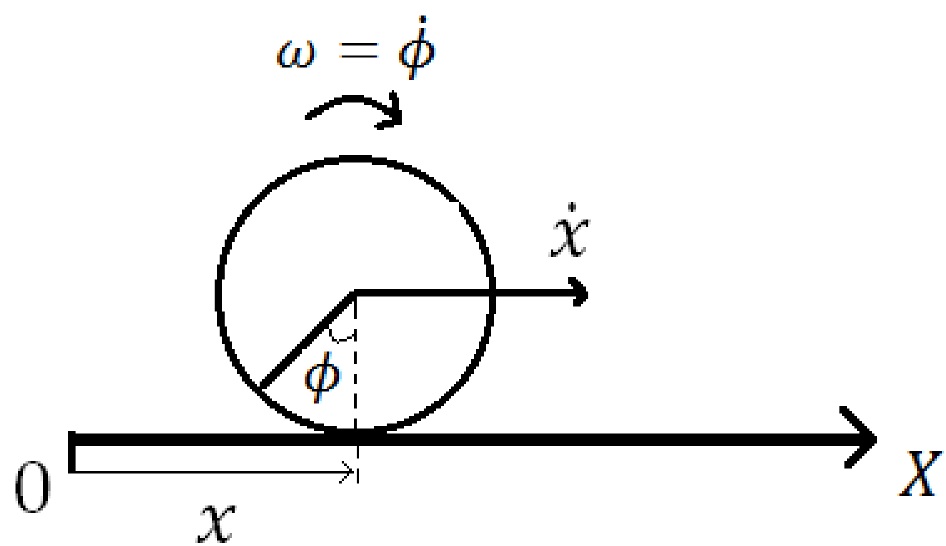


O sistema tem apenas 2 grau de liberdade com coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$

Exemplo 3: Um cilindro rola sem deslizar ao longo de uma linha reta. Sendo *x* a posição do centro de massa do cilindro e ϕ o ângulo de rotação do centro de massa, a condição de rolar sem deslizar é representada por

$$\dot{x} = R\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$$

onde R é o raio do cilindro.



Dinâmica Lagrangiana

A *função de Lagrange* ou, simplesmente, *lagrangiano* L por: $\boxed{L = T - V}$

As equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \Longrightarrow \textbf{Equações de Lagrange}$$

onde $k = 1, \dots, n$.

Se o sistema não for conservativo $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 4: Considere uma partícula numa região onde existe um certo potencial de interação.

Solução: A lagrangiana é dada por: $L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - \mathrm{V}(\vec{r})$

Tomando as coordenadas generalizadas como coordenadas cartesianas, temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = m\ddot{x}_i$$

O que faz com que a equação de Euler-Lagrange forneça:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m\ddot{x}} = -\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial x_i}}$$

que é a segunda lei de Newton para forças conservativas.

Força

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 5: Obtenha a Lagrangiana para um projetil (livre da resistência do ar) em termos de suas coordenadas cartesianas (x, y, z), com z medido verticalmente para cima. Determine as três equações de Lagrange.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = mgz$$

A lagrangiana fica: $$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \mathrm{mgz}$$

As equações de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} = 0$$

$\boldsymbol{0 = m\ddot{x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{0 = m\ddot{y}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{-mg = m\ddot{z}}$ que corresponde a F=mg.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 6: Obtenha a Lagrangiana para uma partícula movendo-se em uma dimensão ao longo do eixo x sujeita à força $F = -kx$ (com k positivo). Determine a equação de Lagrange do movimento.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $F = -kx \rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

As equações de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{-kx = m\ddot{x}}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 7: Considere uma massa m movendo-se em duas dimensões com energia potencial $V(x,y) = -\frac{1}{2}kr^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Obtenha a lagrangeana, usando as coordenada x e y, e determine as equações de movimento de Lagrange.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $T = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \rightarrow V = -\dfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$

A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$

As equações de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{-\boldsymbol{kx = m\ddot{x}}} \qquad \boxed{-\boldsymbol{kx = m\ddot{y}}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 8: Considere uma massa m movendo-se em uma rampa, sem atrito, que tem uma declividade α com a horizontal. Obtenha a Lagrangiana em termos da coordenada x, medida horizontalmente através da rampa, e da coordenada y, medida para baixo da rampa. (Trate o sistema como bidimensional, mas inclua a energia potencial gravitacional). Determine as duas equações de Lagrange e justifique se elas são as mesmas que você esperava.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \rightarrow V = mgy = mgy\sin\alpha$

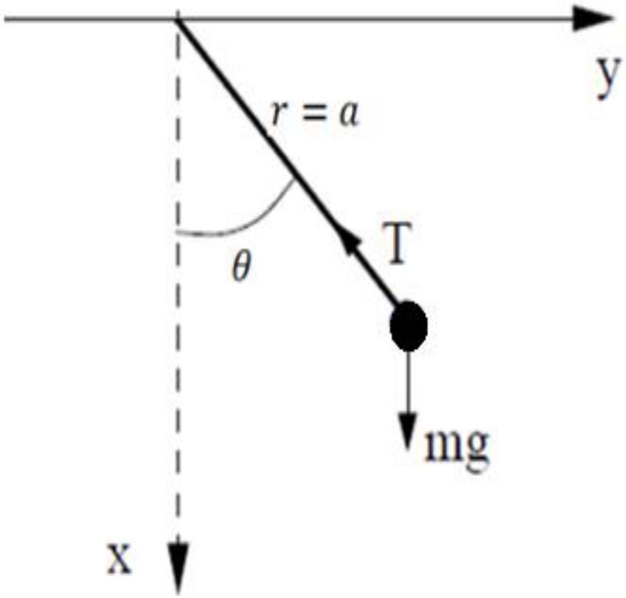
A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\sin\alpha$

As equações de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0 \quad \boxed{\rightarrow \; 0 = \boldsymbol{m\ddot{x}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = 0 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{mg}\sin\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{m\ddot{y}}}$$

Exemplo 9: Determine a Lagrangiana e a equação de movimento de um pêndulo simples em coordenadas polares de raio fixo r=a e θ é a única coordenada livre.



Solução:

$$x = a\cos\theta \;\rightarrow\; y = a\sin\theta$$

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta \;\rightarrow\; \dot{y} = a\dot{\theta}cos\theta$$

A energia cinética e a energia potencial:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mgx = -mga\cos\theta$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V \;\rightarrow\; L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos\theta$$

A equação de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(m a^2 \dot{\theta}\right) + m g a \sin\theta = 0$$

$$m a^2 \ddot{\theta} = -m g a \sin\theta$$

$$a \ddot{\theta} = -g \sin\theta$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 10: Deduza as equações de Lagrange, para uma partícula que se move em um campo conservativo bidimensional, em coordenadas

a) cartesianas
b) Polares
c) cilíndricas

Dinâmica Lagrangiana

Solução: a)

A energia cinética e a energia potencial: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $\quad V = V(x,y)$

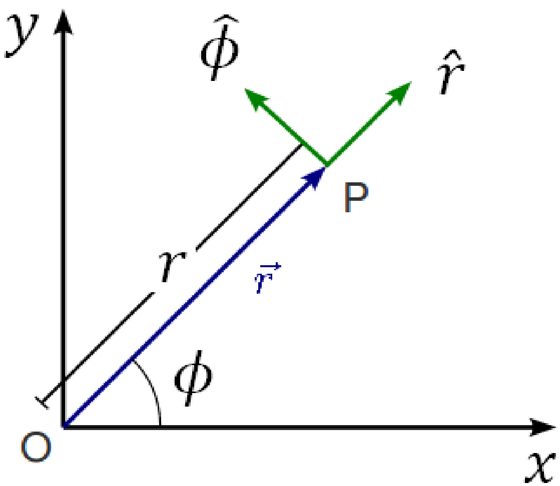
A lagrangiana fica: $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \mathrm{V}(x;y)$

As equações de movimento: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad F_x = m\ddot{x} \\
&\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{y}} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \rightarrow \quad F_y = m\ddot{y}
\end{aligned}\right\} \; \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Solução: b) A energia cinética e a energia potencial: $v_r = \dot{r} \quad \rightarrow \quad v_\phi = r\dot{\phi}$



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$V = V(r, \phi)$$

lagrangiana fica:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \mathrm{V}(r, \phi)$$

A equações de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{r}) - \left[mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right] = 0$$

$$m\ddot{r} = -mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\boldsymbol{F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \mathrm{V}(r,\phi)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(mr^2\dot{\phi}\right) - \left(-\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = 0$$

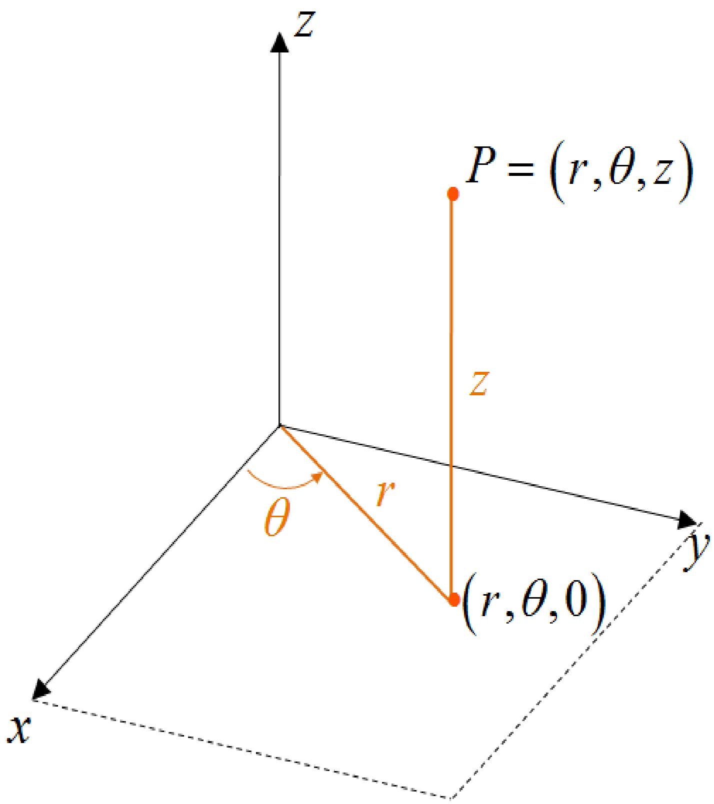
$$\boldsymbol{mr^2\ddot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}}$$

Torque

Momento angular

Dinâmica Lagrangiana

Solução: **c)** A energia cinética e a energia potencial:



$$v_r = \dot{r} \quad \rightarrow \quad v_\phi = r\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad v_z = \dot{z}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$V = V(r, \theta, z)$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \mathrm{V}(r, \theta, z)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \mathrm{V}(r,\theta,z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{r}) - (\mathrm{m}r\dot{\theta}^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0 \quad \rightarrow \quad m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \vec{F}_r$$

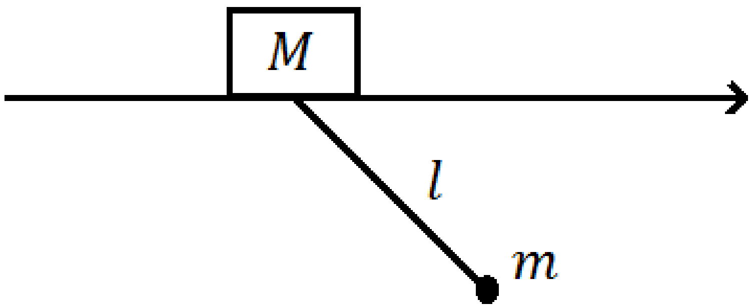
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow \text{Torque}$$

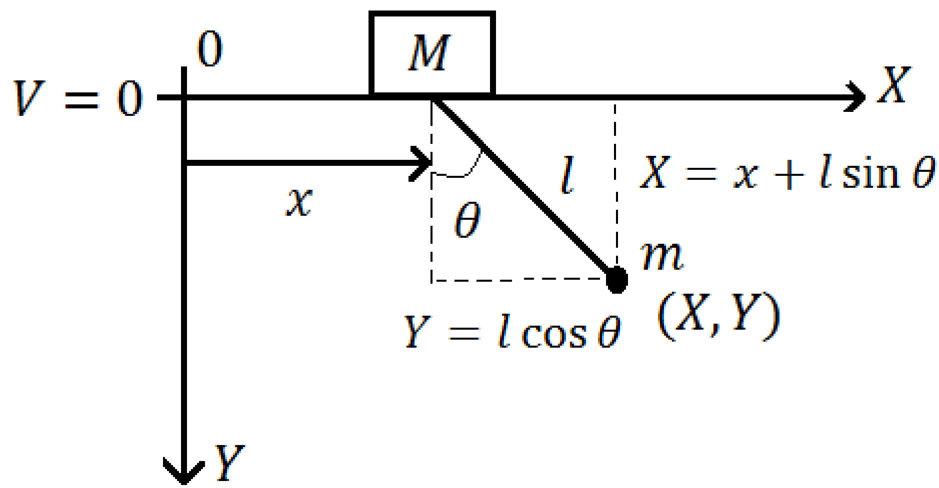
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \vec{F}_z$$

Exemplo 11: Determine a equação de Lagrange e as equações de movimento para um pêndulo com suporte livre (a massa M pode se mover livremente sem atrito no plano horizontal, enquanto o pêndulo oscila no plano vertical).



Refazendo o desenho e tomando o nível de referencia na origem, temos



Dinâmica Lagrangiana

Podemos escrever as energias cinética e potencial

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) \qquad V_M = 0 \;\; e \;\; V_m = -mgY, \qquad logo \quad V = -mgY$$

Como
$$\begin{cases} X = x + l\sin\theta & \rightarrow & \dot{X} = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ Y = l\cos\theta & \rightarrow & \dot{Y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

Logo
$$\begin{cases} \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Podemos reescrever as energias cinética e potencial como

$$T = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \qquad V = -mgl\cos\theta$$

A lagrangiana fica

$$\boxed{\boldsymbol{L = T - V = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta}}$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta$$

Podemos, agora, determinar as equações de movimento

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[(m+M)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\right] - 0 = 0$$

$$\boxed{(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0}$$

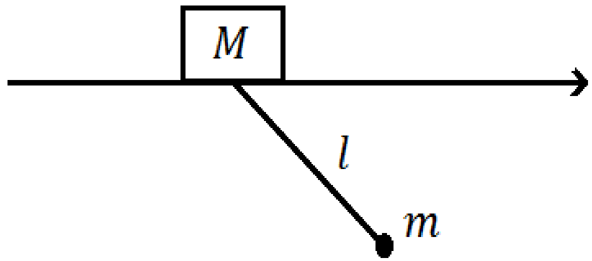
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta\right] - \left[-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta\right] = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta = 0$$

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = 0}$$

Dinâmica Lagrangiana

Como as equações de movimento são difíceis de resolver (equações não lineares – não existe um método geral de resolução, cada caso é um caso), vamos analisar alguns casos limites (particulares) afim de verificarmos se essas equações estão corretas.



1º) Se m = 0 ➡ $(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$

$(0+M)\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{x} = 0} \quad \rightarrow \quad M \textit{ se move como um corpo livre}$

2º) Se M $\rightarrow \infty$ ➡ $(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$

Divide-se todos os termos por M $\quad \dfrac{(m+M)\ddot{x}}{M} + \dfrac{ml\ddot{\theta}\cos\theta}{M} - \dfrac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M} = 0 \rightarrow \ \ddot{x} = 0$

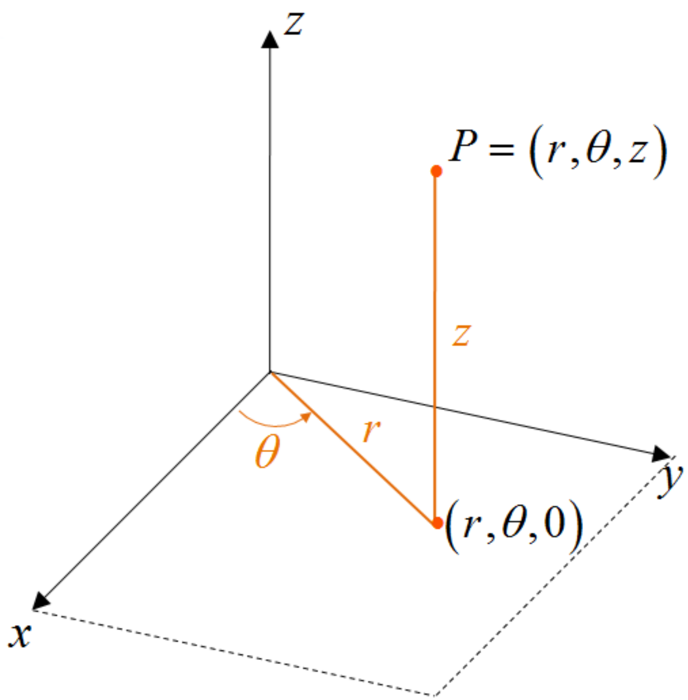
Substituindo $\ddot{x} = 0$ na segunda equação de movimento $\left(ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = 0\right)$ e dividindo por ml^2, obtemos

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\,\theta = 0}$$

que corresponde a equação do pêndulo simples com ponto de suspensão fixo.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 12: Uma partícula de massa *m* move-se em um campo de força conservativo. Ache (a) a função lagrangiana, (b) as equações do movimento em coordenadas cilíndrica (r, θ, z).



Solução: (a) A energia cinética total em coordenadas cilíndricas

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right]$$

A energia potencial $V = (r, \theta, z)$. Então a função lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right] - V(r, \theta, z)$$

(b) As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Dinâmica Lagrangiana

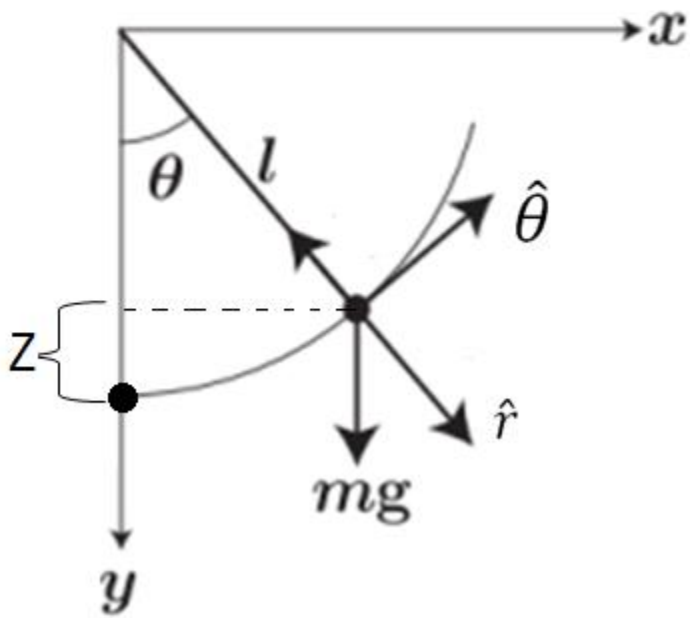
(b) As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Exemplo 13: Considere um pêndulo plano formado por uma haste inextensível de comprimento l e massa desprezível tendo na sua extremidade uma partícula pontual de massa m. Escreva as equações de movimento da partícula em coordenadas polares r e θ.



Solução:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgz = mgr(1 - \cos\theta)$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos\theta)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos\theta)$$

As equações de movimento são: :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{r}) - [mr\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos\theta)] = 0$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g(1 - \cos\theta)}$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1-\cos\theta)$$

As equações de movimento são:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mgr\sin\theta = 0$$

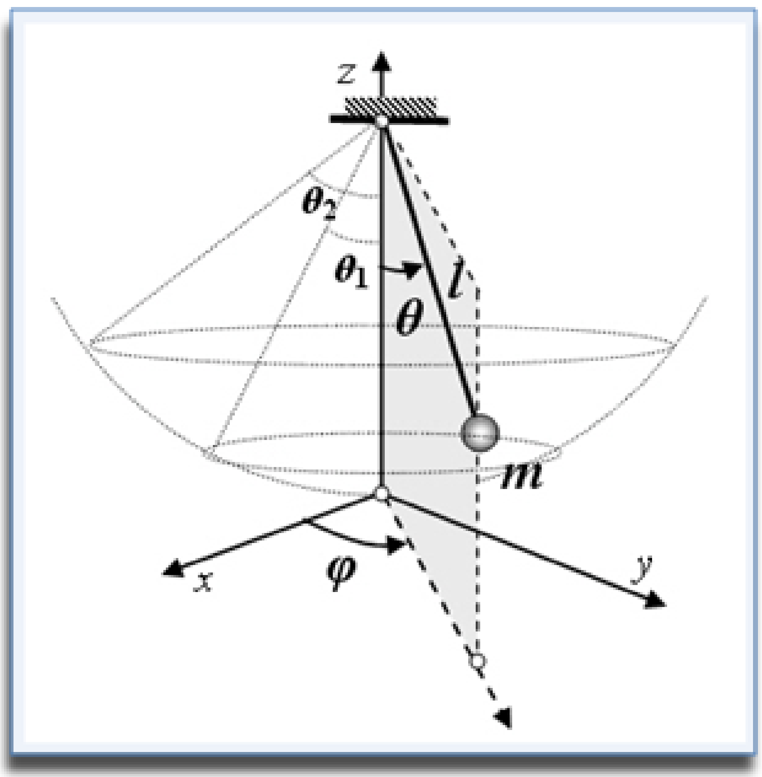
temos: $$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mgr\sin\theta$$

Como, $r = l$ e $\dot{r} = 0$:

$$\boldsymbol{l\ddot{\theta} = mg}\sin\boldsymbol{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\ddot{\theta}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\theta}$$

Exemplo 14: Obtenha as equações de Lagrange para o movimento de um pêndulo esférico, ou seja, uma massa puntiforme suspendida por uma barra de massa desprezível.

SOLUÇÃO:



Podemos pensar inicialmente que o pêndulo esférico tem 3 coordenadas independentes, que são as cartesianas *x*, *y* e *z*. No entanto, o comprimento da barra é constante, o que implica na seguinte equação de vínculo holonômico:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Dessa forma, o número de coordenadas generalizadas será apenas 2. a saber θ e φ, como mostra a figura.

Assim, temos as seguintes equações de transformação de coordenadas:

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = l\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = l - l\cos\theta$$

Fazendo as derivadas temporais, temos:

$$\dot{x} = l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi + l\sin\theta\,(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = l\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + l\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{z} = l\sin\theta\,\dot{\theta}$$

Dinâmica Lagrangiana

Então, a energia cinética é calculada da seguinte maneira:

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)$$

$$\therefore T = \frac{m}{2} l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \, \dot{\varphi}^2 \right)$$

Já a energia potencial é calculada da seguinte maneira:

$$\therefore V = mg \left(l - l \cos \theta \right)$$

Assim, temos a seguinte função Lagrangiana:

$$\therefore L = L\left(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}\right) = T - V = \frac{m}{2} l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \, \dot{\varphi}^2 \right) - mg \left(l - l \cos \theta \right)$$

Dinâmica Lagrangiana

Para obtermos as equações de Lagrange, utilizamos a fórmula abaixo, para cada coordenada generalizada q_j, onde j=1,2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \ (1)$$

Para j = 1, temos $q_1 = \theta$ e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \ e \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2} l^2 \sin 2\theta\, \dot{\theta} - mgl \sin \theta \ \ (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - \left(\frac{m}{2} l^2 \sin 2\theta\, \dot{\theta} - mgl \sin \theta\right) = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \left(\frac{\sin 2\theta\, \dot{\theta}}{2} - \frac{g}{l} \sin \theta\right)$$

Dinâmica Lagrangiana

Para j = 2, temos $q_2 = \varphi$ e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} \; e \; \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \; (3)$$

De (1) e (3), temos:

$$\frac{d}{dt}(ml^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}) - 0 = 0$$

$$ml^2 \sin 2\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + ml^2 \sin^2\theta\, \ddot{\varphi} = 0$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{\sin 2\theta}{\sin^2\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Assim, as equações de Lagrange são:

$$\therefore\ \ddot{\theta} = \left(\frac{\sin 2\theta\,\dot{\theta}}{2} - \frac{g}{l}\sin\theta\right)$$

$$\therefore\ \ddot{\varphi} + \frac{\sin 2\theta}{\sin^2\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0$$

Momentos generalizados (canônicos)

Estas equações podem ser chamadas de equação de movimento de Lagrange

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Equações de Hamilton

O hamiltoniano $H(q, p, t)$ definida por: $$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Se um sistema for conservativo, o *hamiltoniano* H pode ser interpretado como a energia total (cinética e potencial) do sistema. $H = T + V$

Equações de movimento de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Exemplo 15: A lagrangiana de um oscilador harmônico é dada por

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$, determine:

a) o momento conjugado

$$p_x = m\dot{x} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

b) A hamiltoniana

$$H = \dot{x}p_r - L = \frac{p_x^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \frac{kx^2}{2}$$

Exemplo 16: A partícula livre em coordenadas esféricas. O vetor velocidade é dado por $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\phi}}\sin\boldsymbol{\theta}\,\widehat{\boldsymbol{\phi}}$, determine:

a) a lagrangiana

$$L = T + V = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 sin^2\theta\right)$$

b) Os momentos conjugados

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi = mr^2 sin^2\theta\dot{\phi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{(mr^2 sin^2\theta)} \end{cases}$$

c) a hamiltoniana

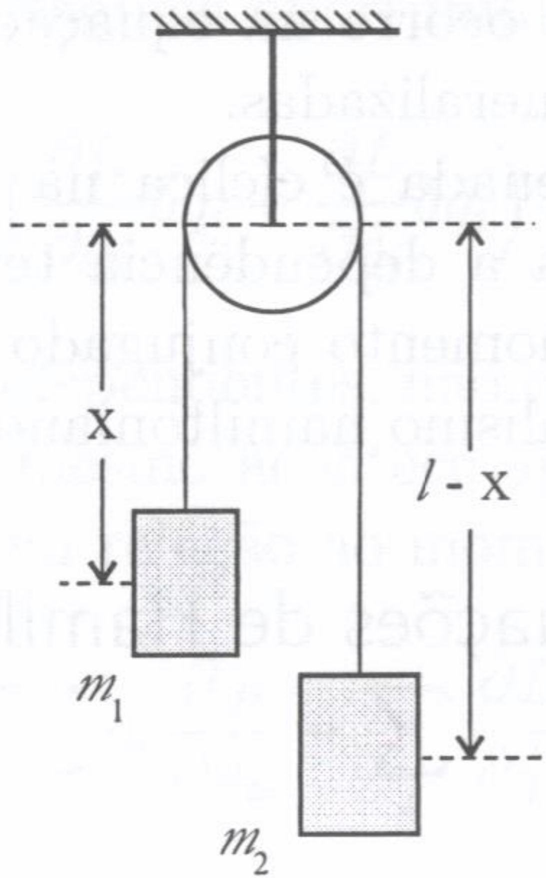
$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$$

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L$$

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2 sin^2\theta} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 - \frac{mr^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 - \frac{mr^2 sin^2\theta}{2}\left(\frac{p_\phi}{mr^2 sin^2\theta}\right)^2$$

$$\boldsymbol{H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 sin^2\theta}\right)}$$

Exemplo 17: Maquina de Atwood



Pelos dados da figura, temos

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 \qquad V = -m_1 g x - m_2 g(l - x)$$

Desprezando o termo constante, temos

$$V = -m_1 g x - m_2 g x$$

A expressão do lagrangiano fica

$$L = T - V \qquad L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

A expressão do hamiltoniano é dada por

$$H = \dot{q}_i p_i - L = p\dot{x} - L$$

$$H = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

Dinâmica Hamiltoniana

$$H = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

O hamiltoniano deve ser escrito apenas em termos de coordenadas e momentos, eliminando as velocidades.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

Substituindo a equação $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$

no hamiltoniano $H = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$

obtemos $H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)^2} + (m_1 - m_2)gx$

Dinâmica Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)^2} + (m_1 - m_2)gx$$

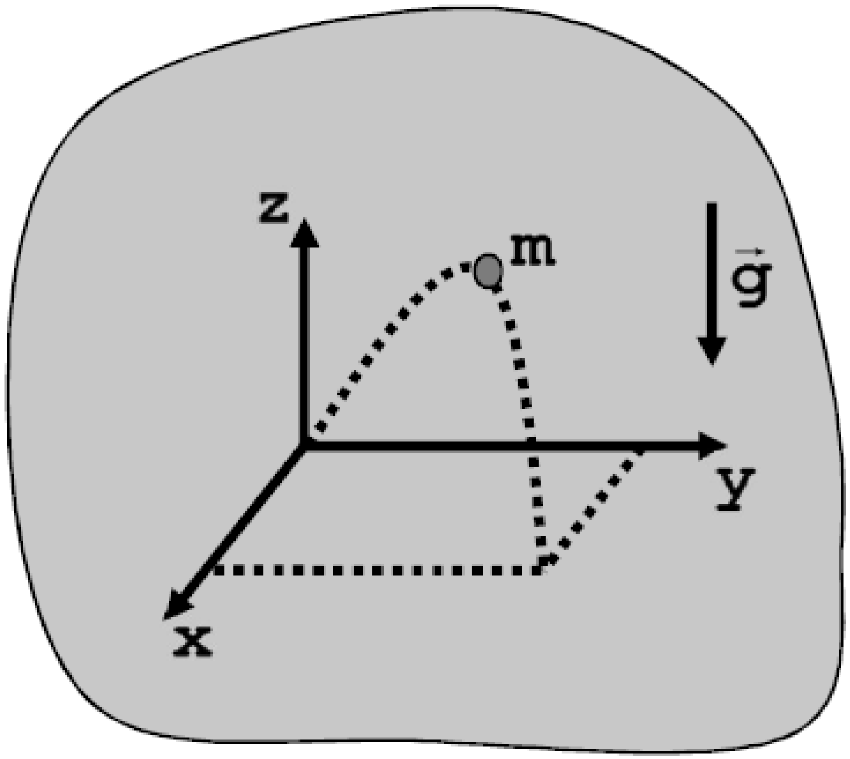
Calculando as equações de Hamilton $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

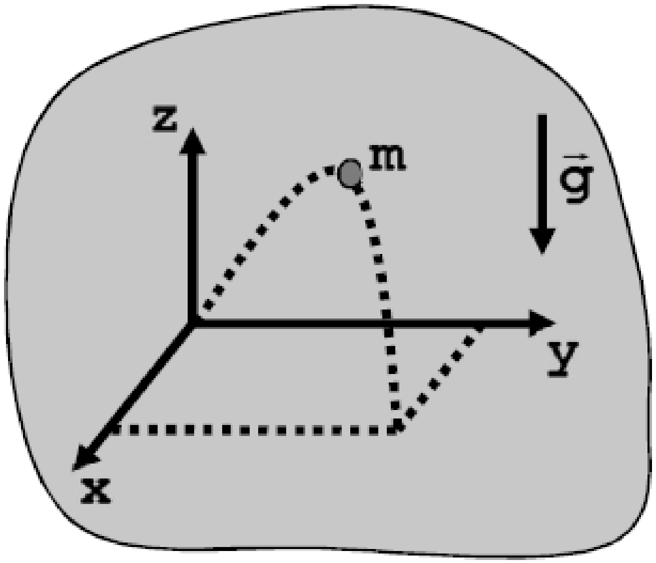
Combinando as duas expressões, obtemos a expressão para a aceleração com que as massas se deslocam

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

Exemplo18: Encontre a Hamiltoniana e as equações canônicas de Hamilton para um movimento em três dimensões de uma partícula em um campo gravitacional uniforme sem resistência do ar.



Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p_k' = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Coordenadas generalizadas (x, y, z)

Energia Cinética :

$$T = \frac{1}{2} m \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)$$

Energia Potencial : $V = m g z$

Lagrangean : $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2} m \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right) - m g z$$

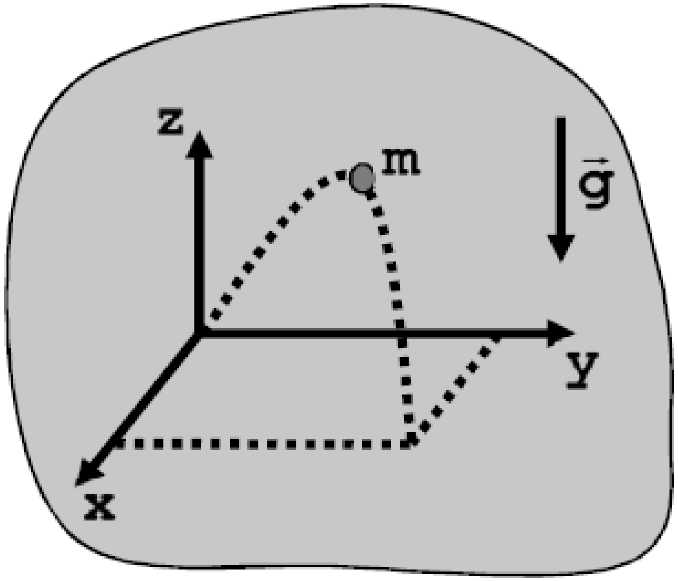
Cálculo dos momentos generalizados :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = m x'$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = m y'$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial z'} = m z'$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Momentos generalizados :

$$p_x = m x' \longrightarrow x' = p_x / m$$

$$p_y = m y' \longrightarrow y' = p_y / m$$

$$p_z = m z' \longrightarrow z' = p_z / m$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2} m \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right) + m g z$$

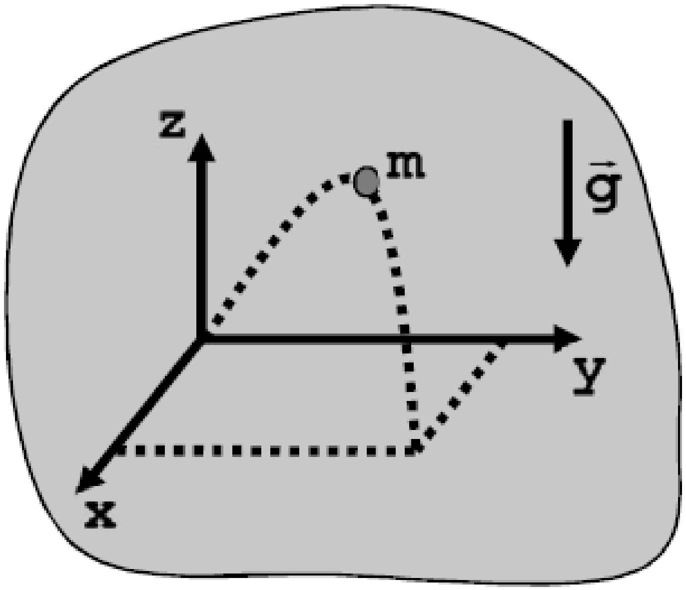
$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) + m g z$$

Equações canônicas para x:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \rightarrow p'_x = m x''$$

$$p'_x = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow m x'' = 0$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p_k' = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$$

Equações canônicas para x:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \rightarrow p_x' = m x''$$

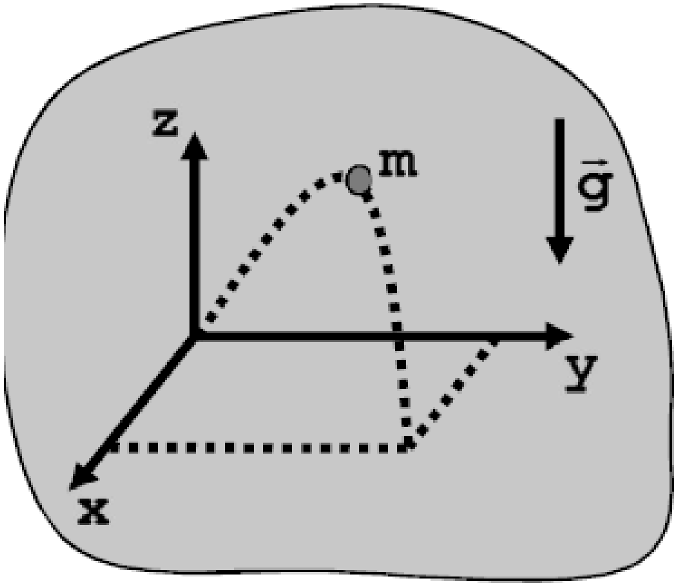
$$p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow m x'' = 0$$

Equações canônicas para y:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \rightarrow p_y' = m y''$$

$$p_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \rightarrow m y'' = 0$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + m g z$$

Equações canônicas para z:

$$z' = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \rightarrow p'_z = m z''$$

$$p'_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -m g$$

$$m z'' = -m g$$

$$z'' = -g$$