

# Mecânica Analítica

---



**PRONECIM**  
PROGRAMA NÚCLEO DE ESTUDOS EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

## Dinâmica Lagrangiana

*Licenciatura em Física*

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

# Dinâmica Lagrangiana

---

- O formalismo desenvolvido por **Newton** se caracteriza por lidar com grandezas vetoriais (Mecânica Vetorial).
- A Mecânica Analítica trata com grandezas escalares (coordenadas e energias), categoria em que se encaixam as teorias desenvolvidas por Lagrange e Hamilton).
- Na introdução de seu livro *Méchanique Analytique*, publicado em 1788, **Lagrange** alertava:” Nenhum diagrama será visto neste trabalho”. Quer dizer, é possível resolver todos os problemas acerca do movimento, como aqueles em que usamos a teoria de Newton, sem faz a menor menção a forças ou vetores.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## ➤ Vínculos

São limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento.

- É importante salientar que os *vínculos* são limitações *de ordem cinemática* impostas ao sistema mecânico.
- As restrições antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema.
- Restrições de natureza dinâmica – decorrentes, portanto das equações de movimento – *não são vínculos*.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 1:

A segunda lei de Newton obriga uma partícula sujeita a uma força central a se mover num plano fixo, mas isso não caracteriza um vínculo, pois é de natureza dinâmica.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 2:

Uma partícula está restrita a uma superfície fixa. Seja  $\vec{r} = (x, y, z)$  o vetor posição da partícula relativa a um sistema cartesiano de eixos em relação ao qual a superfície permanece fixa. Então  $x, y, z$  não são variáveis independentes mas devem satisfazer

$$f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z) = 0$$

onde  $f(\vec{r}) = 0$  é a equação da superfície. Se, por exemplo, a superfície for uma esfera centrada na origem,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

onde  $R$  é o raio da esfera.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 3:

Uma partícula está restrita a uma superfície móvel e deformável. Neste caso  $x, y, z$  obedecem à equação

$$f(\vec{r}, t) \equiv f(x, y, z, t) = 0$$

a dependência temporal explícita indica a mudança na forma ou localização da superfície no transcurso do tempo.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 4:

Duas partículas movem-se no espaço sempre unidas por uma haste rígida. O vínculo tem a forma

$$(r_2 - r_1)^2 - l^2 = 0$$

ou, equivalente,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

sendo  $l$  o comprimento invariável da haste.

# Dinâmica Lagrangiana

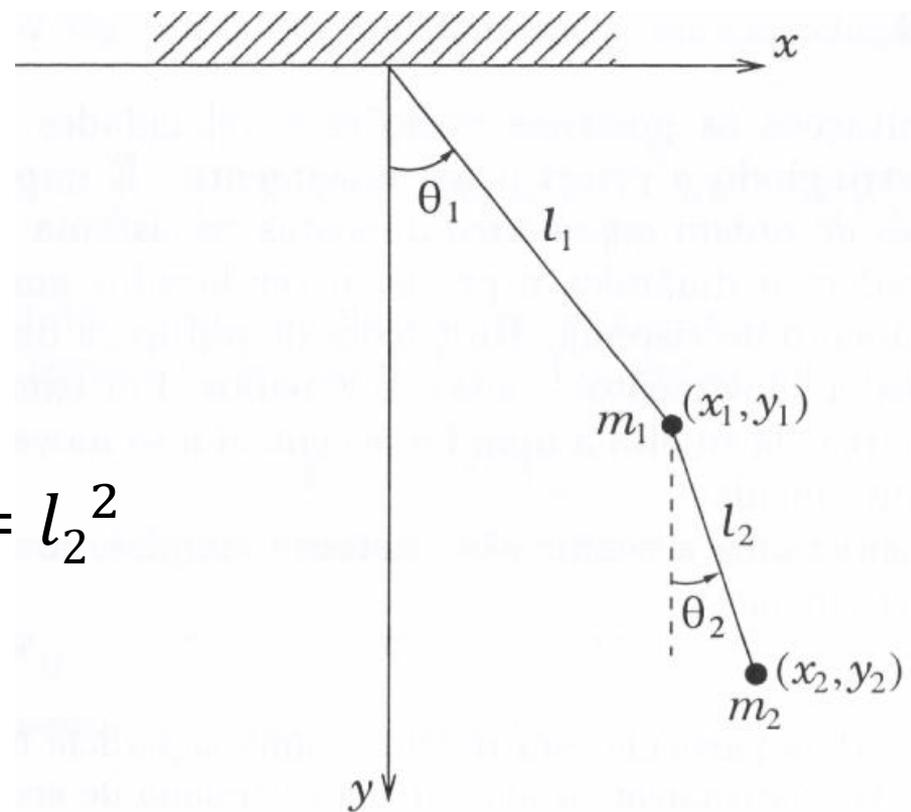
## Exemplo 5:

Um pêndulo duplo oscila num plano vertical fixo. As equações de vínculo são

$$x^2 + y^2 - l_1^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$



# Dinâmica Lagrangiana

---

## ➤ Coordenadas Generalizadas

Considere uma partícula ou sistema de partículas em movimento, sujeita a possíveis restrições (vínculos). Haverá um número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar o movimento.

Essas coordenadas representadas por

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

são *chamadas coordenadas* generalizadas e podem ser distâncias, ângulos ou valores relacionados a eles.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## ➤ Notação:

O subscrito  $\alpha$  variará de 1 a  $n$ , o número de graus de liberdade, enquanto o subscrito  $\nu$  variará de 1 a  $N$ , o número de partículas do sistema.

- Considere o vetor posição da  $\nu$ -partícula em relação ao sistema de coordenadas  $xyz$  como

$$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$$

A relação entre as coordenadas generalizadas e as coordenadas de posição são dadas pelas *equações de transformação*,

# Dinâmica Lagrangiana

---

$$x_v = x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$y_v = y_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$z_v = z_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Na forma vetorial, podemos escrever

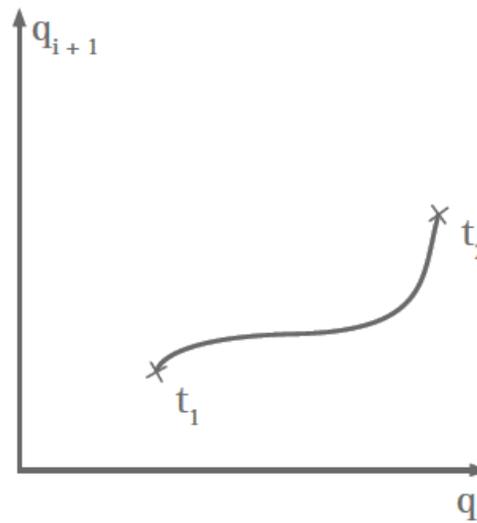
$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Essas funções são consideradas como sendo contínuas e tendo derivadas contínuas.

# Dinâmica Lagrangiana

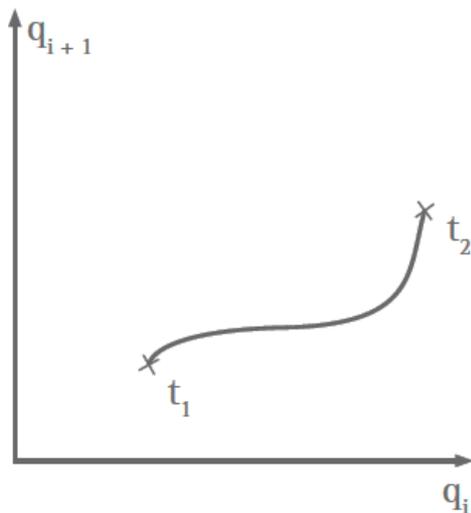
## ➤ Espaço de Configuração

- Como as coordenadas generalizadas são independentes entre si, em princípio, é possível imaginar um conjunto de eixos mutuamente perpendiculares definindo um espaço de  $n$  dimensões, em que cada ponto representa uma possibilidade, uma configuração, em que o sistema pode se encontrar.
- A evolução temporal do sistema é representada por uma curva  $q(t)$  neste espaço.



# Dinâmica Lagrangiana

---



A figura mostra a representação bidimensional dessa curva no espaço de configuração (a representação cartesiana é apenas simbólica, pois no caso geral tal estrutura não é garantida; por exemplo, a coordenada pode ser um ângulo) entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Neste contexto, chamaremos de velocidade generalizada a derivada temporal da coordenada generalizada:

- **Velocidade Generalizada:** chamaremos de velocidade generalizada a derivada temporal da coordenada generalizada:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 6:

Escreva as equações de transformação o pêndulo duplo

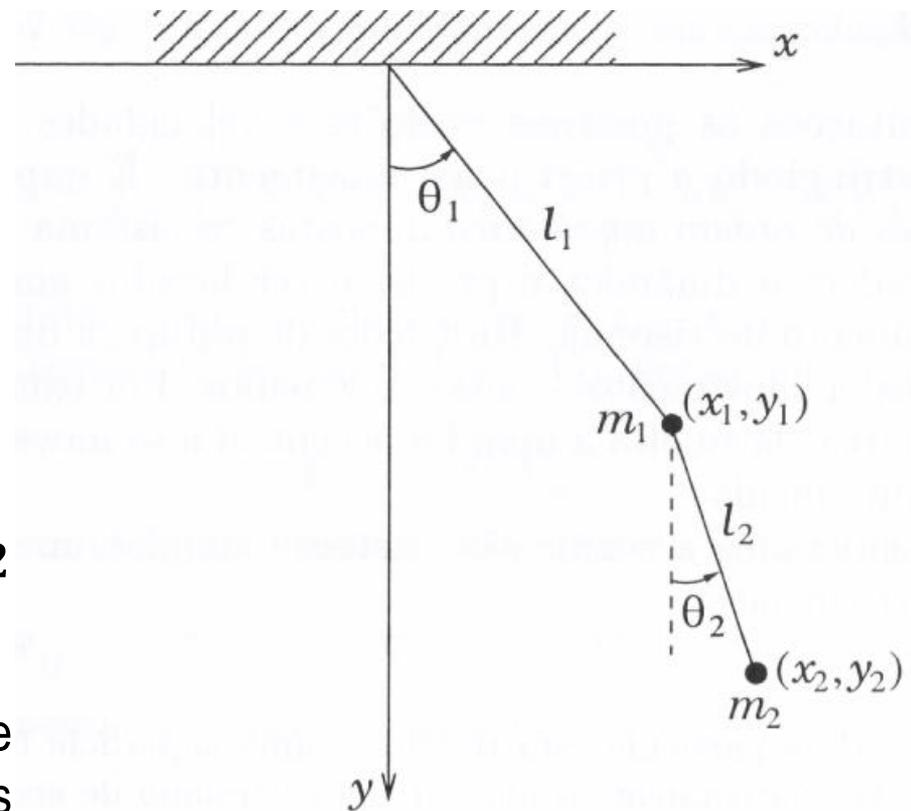
$$x_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

O sistema tem apenas 2 graus de liberdade com coordenadas generalizadas  $q_1 = \theta_1$  e  $q_2 = \theta_2$



# Dinâmica Lagrangeana

---

## ➤ Vínculos Holônomos

Sejam as coordenadas de um sistema representadas por  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e o tempo representado por  $t$ . Se todas as restrições do sistema podem ser representadas por equações da forma  $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$  ou sua equivalente, então o sistema é dito **holonômico**.

- Envolve o tempo de modo explícito.

## ➤ Vínculos Não-Holônomos

São aqueles que não podem ser expressos dessa forma. Exemplo: as paredes de um recipiente esférico de raio  $a$  onde encontram-se confinadas as moléculas de um gás. Nesse caso os vínculos são  $r_i < a$

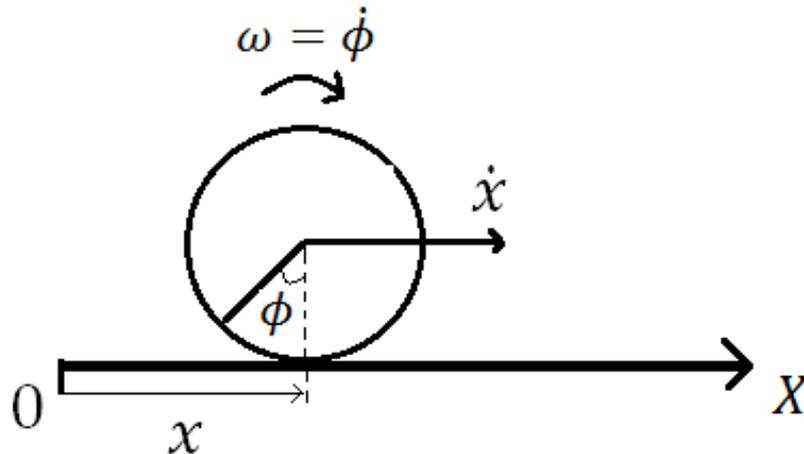
# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 7:

Um cilindro rola sem deslizar ao longo de uma linha reta. Sendo  $x$  a posição do centro de massa do cilindro e  $\phi$  o ângulo de rotação do centro de massa, a condição de rolar sem deslizar é representada por

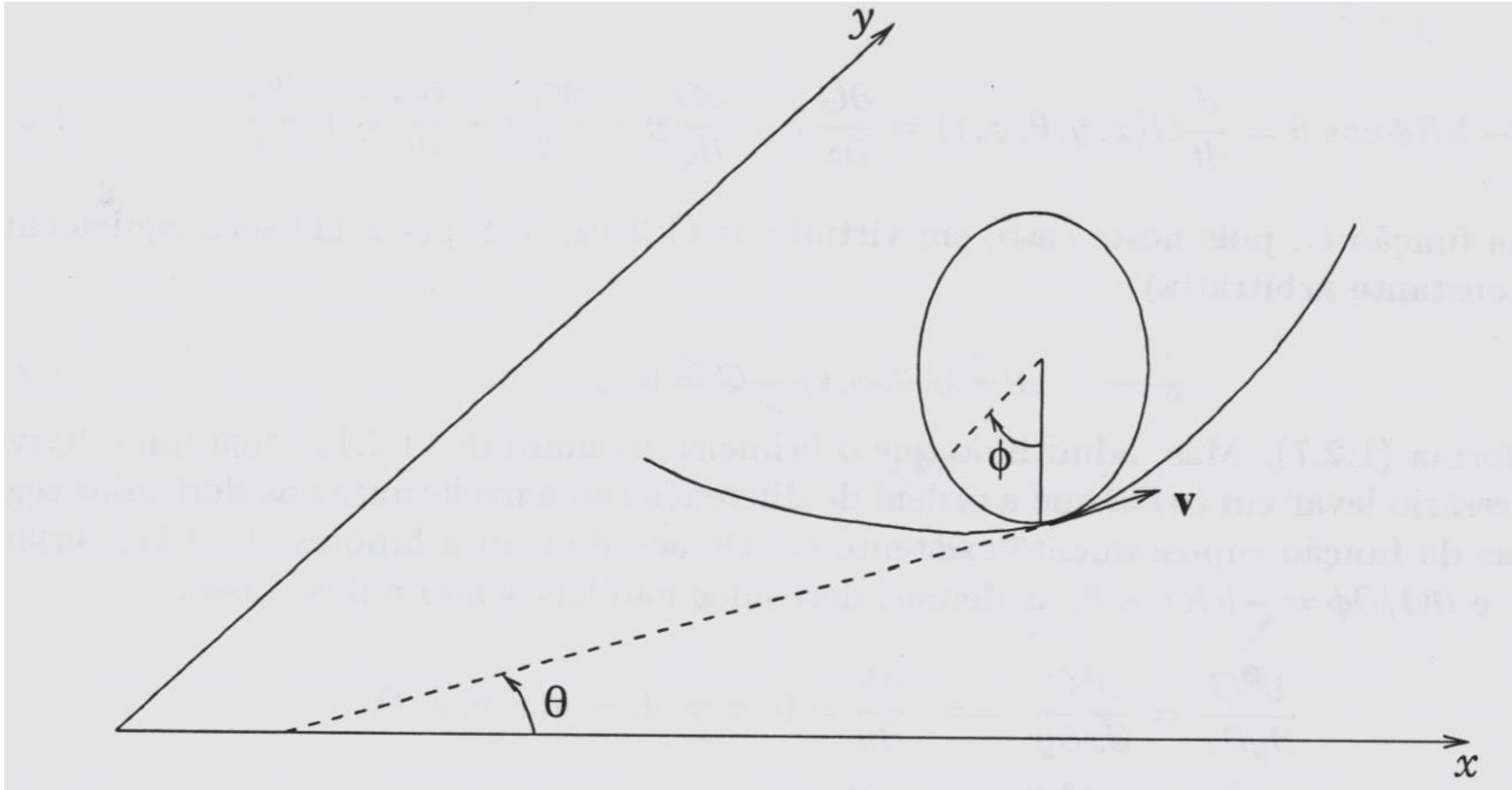
$$\dot{x} = R\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$$

onde  $R$  é o raio do cilindro.



# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 8:



## Exemplo 8:

---

Um disco vertical (moeda) rola sem deslizar num plano horizontal. Sejam  $(x, y)$  a posição do centro de massa do disco,  $\theta$  o ângulo do plano do disco com o eixo  $x$  e  $\phi$  o de rotação do disco em torno do seu eixo de simetria. Sendo  $\vec{v}$  a velocidade do centro de massa, o disco rola sem deslizar desde que  $\vec{v} = R\dot{\phi}$ .

Sabendo que  $\dot{x} \equiv v_x = v \cdot \cos \theta$  e  $\dot{y} \equiv v_y = v \cdot \sin \theta$ , somos conduzidos às equações

$$\dot{x} - R\dot{\phi} \cos \theta = 0 \quad e \quad \dot{y} - R\dot{\phi} \sin \theta = 0$$

que exprimem matematicamente a condição de rolamento sem deslizar.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

## ➤ Princípio de D'Alembert

O princípio de D'Alembert, ou princípio do trabalho virtual, usa a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo da descrição do problema.

- Sem aparecerem explicitamente nas equações (**forças de vínculo**), mantém 'automaticamente' as restrições ao movimento, reduzindo de maneira natural o número de graus de liberdade considerados na descrição do sistema.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

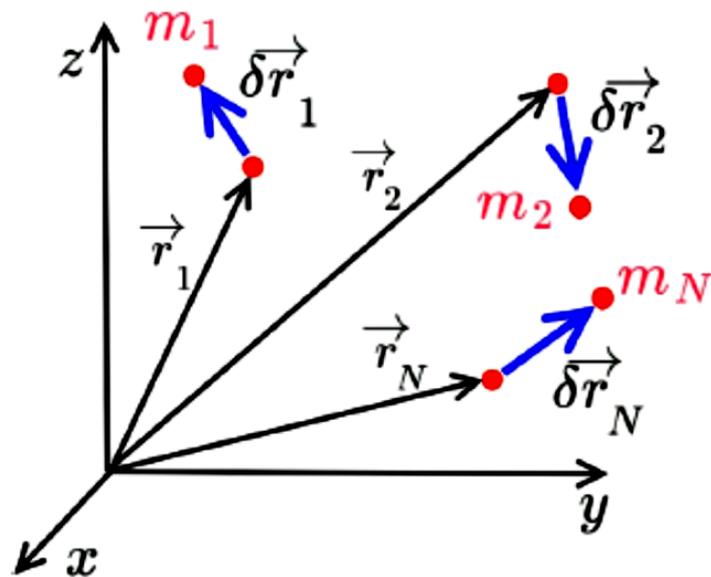
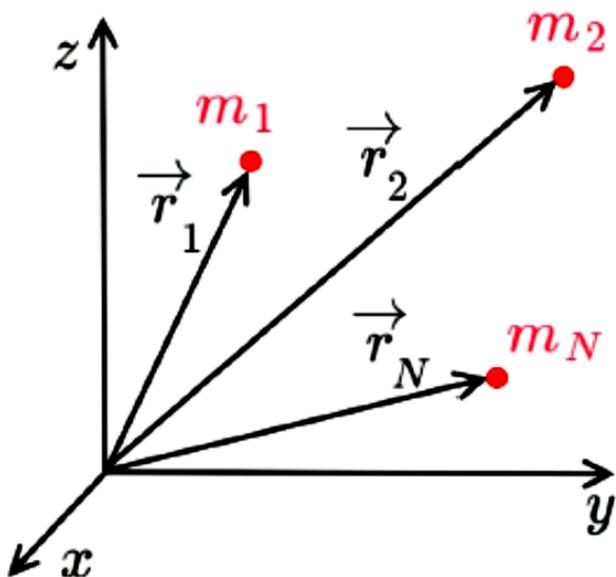
---

## ➤ Deslocamentos Virtuais

- A formulação lagrangiana da mecânica parte do princípio de D'Alembert de trabalhos virtuais nulos.
- Sua ideia consiste em considerar como variações 'virtuais'  $\delta\vec{r}_i$  nas posições das partículas, i.e. variações hipotéticas na configuração instantânea do sistema, alterariam quantidades relacionadas a sua energia.
- Em certo sentido, queremos determinar como o sistema se comporta nas 'vizinhanças' de sua configuração instantânea para entender qual das rotas possíveis a natureza escolhe na evolução temporal.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

- **Esquerda:** A mecânica newtoniana descreve um sistema mecânico através do conjunto de posições  $\{\vec{r}_i(t)\}$  de todas as suas partículas.
- **Direita:** O princípio de D'Alembert considera como o sistema mecânico responde a uma mudança 'virtual' (i.e. hipotética) de configuração representada pelo conjunto de vetores infinitesimais  $\{\delta\vec{r}_i(t)\}$ .



# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

- São deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam a uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no **mesmo instante  $t$** .
- Dado um sistema de  $N$  partículas os deslocamentos virtuais  $\delta \vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ , são deslocamentos infinitesimais das posições  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  realizados instantaneamente e com a propriedade de serem compatíveis com os vínculos
- **Deslocamentos Virtuais:** em suma, as características definidoras dos deslocamentos virtuais são:
  - i. eles são infinitesimais;
  - ii. ocorrem num instante  $t$  fixo;
  - iii. não violam os vínculos.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

## ➤ Trabalho Virtual

Nesse formalismo, a distinção entre forças de vínculo e outras forças, que chamaremos de forças aplicadas, é fundamental. Seja então

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

a força total atuando na  $i$ -ésima partícula do sistema, onde  $\vec{f}_i$  são as forças de vínculo e  $\vec{F}_i^{(a)}$  são as forças aplicadas, que podem ser externas ou devido às outras partículas do sistema.

## Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

Veremos inicialmente como fazer isso no caso **estático**, isto é, um sistema de partículas em equilíbrio. Neste caso  $\vec{F}_i = 0$  e, quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais  $\delta\vec{r}_i$ ,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

como 
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

resulta 
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

## Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

Levando em conta que o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, somos conduzidos ao chamado ***princípio dos trabalhos virtuais***:

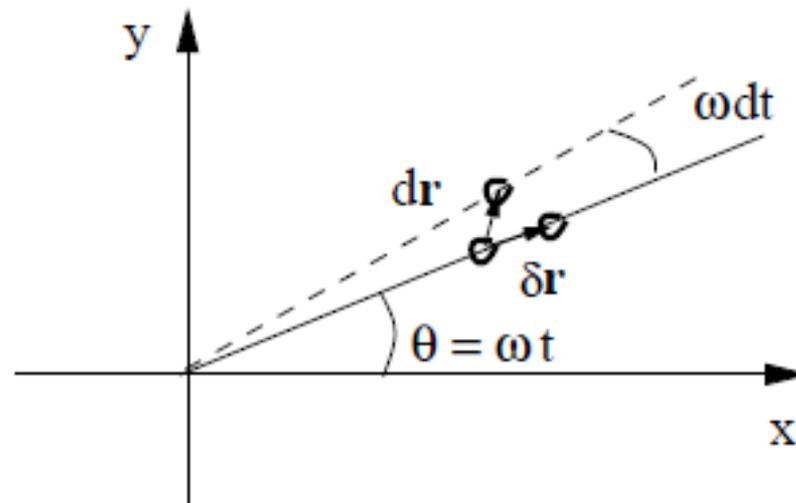
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Este princípio permite exprimir a condição de equilíbrio para sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

## Exemplo 9:

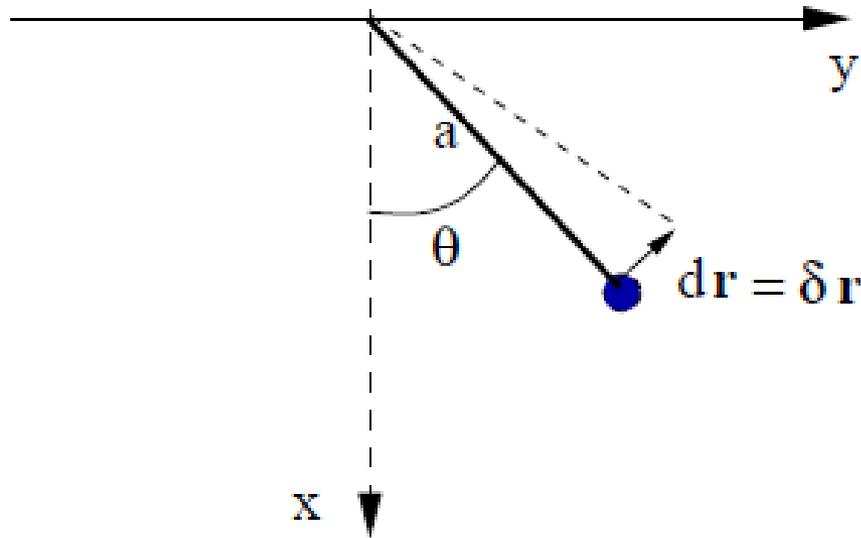
Considere a barra girando horizontalmente com velocidade angular  $\omega$  e na qual uma conta pode deslizar sem atrito, conforme a figura. O deslocamento virtual da partícula ocorre com o tempo congelado e é feito ao longo da barra com esta parada. O deslocamento real da conta, por outro lado, leva a rotação da barra. Note que a força de vínculo em cada instante é sempre perpendicular à barra e  $\delta\vec{r} \cdot \vec{f} = 0$ .



# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

## Exemplo 10:

No caso do pêndulo simples o deslocamento virtual coincide com o real e está na direção  $\hat{\theta}$ , perpendicular à tensão no fio.



## Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

Estamos interessados na dinâmica, que pode ser formalmente reduzida à estática escrevendo a segunda lei de Newton na forma  $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$ , com  $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$ . Segundo a interpretação de d'Alembert. Cada partícula do sistema encontra-se em “equilíbrio” sob uma força resultante que é a soma da força real com uma “força efetiva invertida” igual a  $-\dot{\vec{p}}_i$ . Esta força adicional fictícia é uma força de inércia existente no referencial que acompanha o movimento da partícula, isto é, no qual ela permanece em repouso. Podemos escrever:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

é verdadeira para qualquer deslocamento virtual  $\delta \vec{r}_i$ .

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

---

Usando a equação  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$  e admitindo a nulidade do trabalho virtual das forças de vínculo, resulta o chamado **princípio de d'Alembert**:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

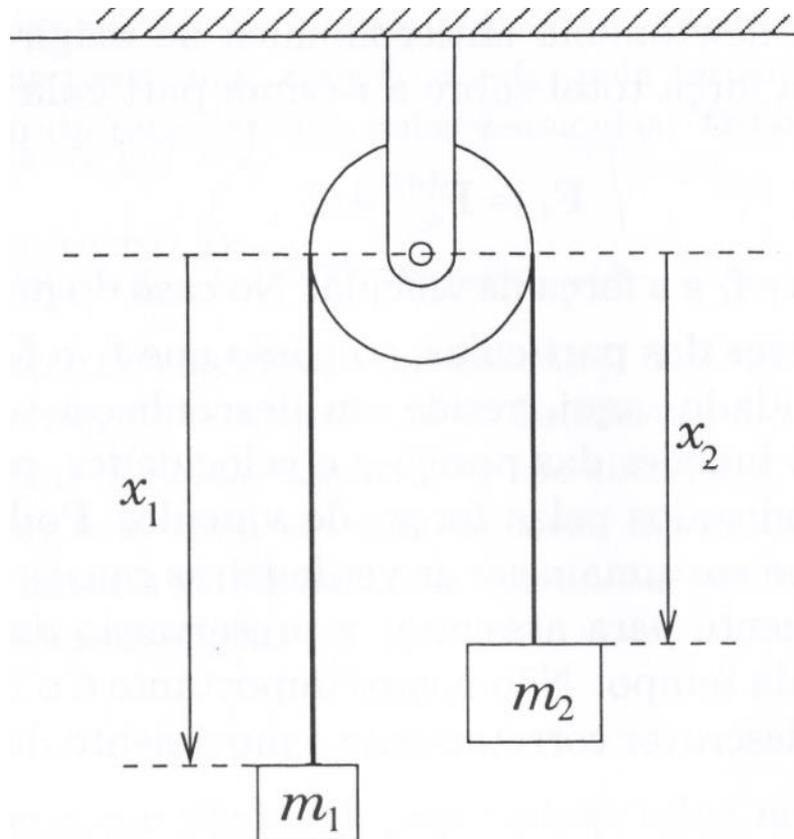
Este princípio representa uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais a sistemas mecânicos em movimento.

Em suas aplicações concretas é preciso levar em conta que os deslocamentos virtuais  $\delta \vec{r}_i$  não são independentes, pois têm que estar em harmonia com os vínculos.

# Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

## Exemplo 11:

Utilizando o *princípio de d'Alembert*, encontrar as equações do movimento para o sistema mecânico da máquina de Atwood.



## Exemplo 11:

### Solução:

A roldana é suposta sem massa e sem atrito. Com o sistema cartesiano indicado na figura, temos:

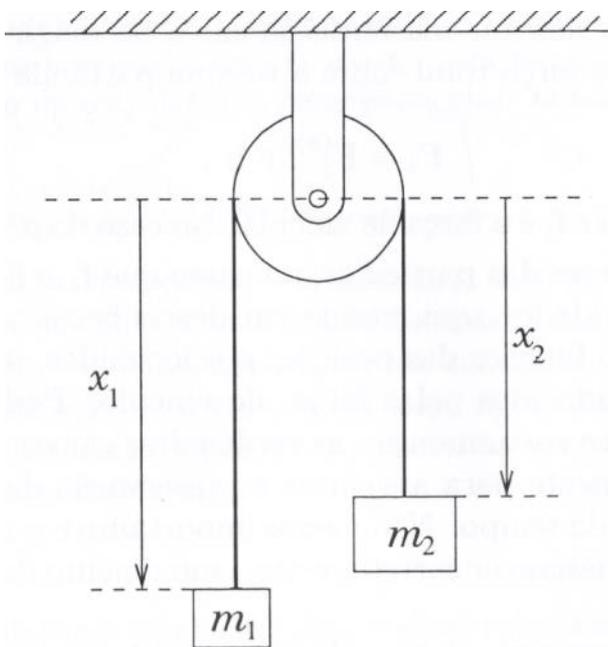
$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} \text{ e } \vec{r}_2 = x_2 \hat{i}$$

e o vínculo holônomo escreve-se:

$$x_1 + x_2 = l$$

onde a constante  $l$  é determinada pelo raio da roldana e o comprimento do fio, suposto inextensível e de massa desprezível. Claramente, os deslocamentos virtuais  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$  são compatíveis com o vínculo  $x_1 + x_2 = l$  e estão relacionados por

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \delta x_1 = -\delta x_2$$



## Exemplo 11:

---

Em outras palavras, se uma das massas sobe a outra desce a mesma distância, e vice-versa.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_2 \\ &= m_1 g \hat{i} \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 g \hat{i} \cdot \delta \vec{r}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + (-m_2 \ddot{x}_1) \cdot (-\delta x_1) &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g (-\delta x_1) \rightarrow \\ \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 \delta x_1 &= (m_1 - m_2) g \delta x_1 \end{aligned}$$

## Exemplo 11:

---

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 \delta x_1 = (m_1 - m_2)g \delta x_1$$

Em vista da arbitrariedade de  $\delta x_1$ , resulta a equação do movimento da massa  $m_1$ :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

esse resultado coincide com o resultado obtido pelo tratamento newtoniano elementar. A aceleração de  $m_2$  é simplesmente  $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ .

# Dinâmica Lagrangiana

## ➤ Forças Generalizadas

Se  $W$  for o trabalho total realizado sobre um sistema de partículas pelas Forças  $\vec{F}_i^{(a)} \equiv \vec{F}_i$  atuantes (aplicadas) sobre a  $k$ -ésima partícula, então

$$dW = \sum_{i=1}^n Q_k \delta q_k$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

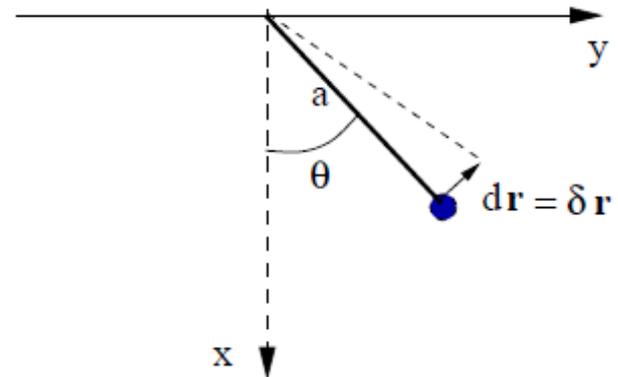
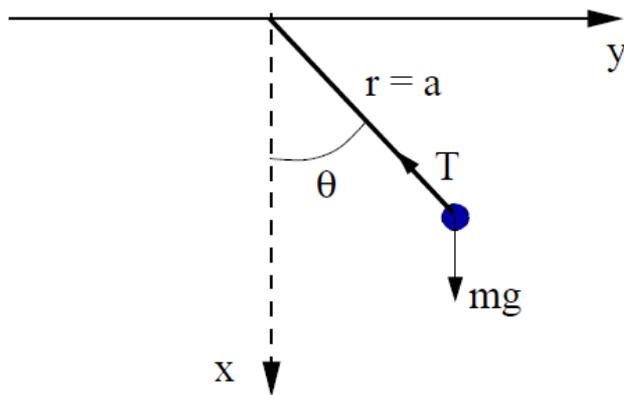
$Q_k$  é chamada de *força generalizada* associada à coordenada generalizada  $q_k$ .

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 12:

Considere o pêndulo ilustrados nas figuras abaixo. Nesse caso  $\vec{F}^{(a)} = mg\hat{x}$ ,  $\vec{f} = -T\hat{r}$  e a transformação de  $(x, y)$  para a coordenada generalizada  $\theta$  é  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . A força generalizada para a coordenada  $\theta$  é

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad Q_\theta = mg\hat{x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = mg \frac{\partial x}{\partial \theta} = -mga \sin \theta$$



A condição de equilíbrio  $Q_\theta = 0$  fornece  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

# Dinâmica Lagrangiana

---

## ➤ Equações de Lagrange

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças sejam deriváveis de um potencial ou energia potencial  $V$ , podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

# Dinâmica Lagrangiana

---

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças  $\vec{F}_i$  sejam deriváveis de um potencial escalares  $V(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N, t)$  (ou energia potencial  $V$ ), Neste caso,

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = - \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{k} \right)$$

# Dinâmica Lagrangiana

---

e as forças generalizadas escrevem-se

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

onde usamos a regra da cadeia.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

## Dinâmica Lagrangiana

---

Como  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$  e  $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0$$

Dado que  $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$ , esta última equação equivale a

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0$$

Definindo a *função de Lagrange* ou, simplesmente, *lagrangiano*  $L$  por

$$L = T - V$$

# Dinâmica Lagrangiana

---

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad L = T - V$$

as equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \longrightarrow \quad \text{Equações de Lagrange}$$

onde  $k = 1, \dots, n$ .

Se o sistema não for conservativo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 13:

Considere uma partícula de massa  $m$  sujeita a uma força conservativa  $\mathbf{F}$  num espaço tridimensional.

### ➤ Solução

1. Newton: 
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Usando coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  temos:

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} \quad \ddot{y} = \frac{F_y}{m} \quad \ddot{z} = \frac{F_z}{m}$$

## Exemplo 13:

---

2. Lagrange: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Usando coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  temos:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad V = V(x, y, z)$$

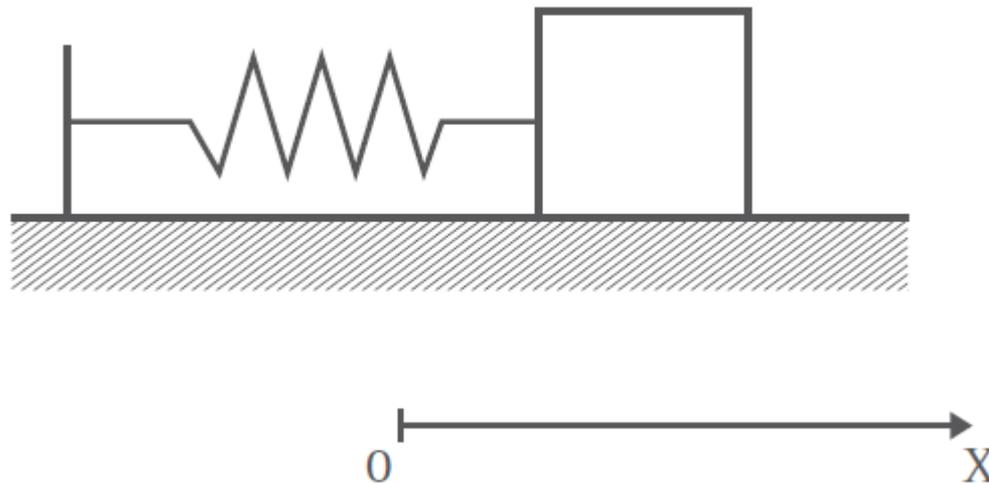
$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \partial V / \partial x = F_x \quad \therefore m\ddot{x} = F_x \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \partial V / \partial y = F_y \quad \therefore m\ddot{y} = F_y \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \partial V / \partial z = F_z \quad \therefore m\ddot{z} = F_z \end{array} \right.$$

# Dinâmica Lagrangiana

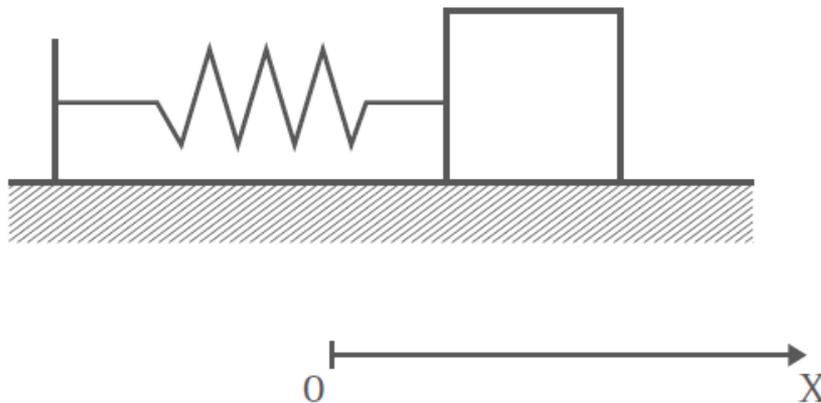
## Exemplo 14:

Consideremos uma partícula de massa  $m$  em uma dimensão, sem atrito, sob a ação de uma mola de constante  $k$ , conforme representado na figura:



## Exemplo 14:

### ➤ Solução



1. Newton: 
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = -kx$$

Usando a coordenada  $x$  representada na figura temos

$$-kx = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\frac{kx}{m}$$

## Exemplo 14:

---

2. Lagrange: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 ; V = \frac{1}{2} kx^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} ; \frac{\partial L}{\partial x} = - kx \therefore m \ddot{x} = - kx$$

# Dinâmica Lagrangiana

---

## Exemplo 15:

O objetivo deste exemplo é ilustrar certos cuidados que devemos ter em relação às várias derivadas parciais e totais que aparecem ao longo dos cálculos no formalismo de Lagrange. Considere um sistema fictício de dois graus de liberdade cuja Lagrangeana é dada por  $L = q_1^2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2$ .

Equações de Lagrange 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Essa Lagrangeana tem as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

**Exemplo 15:**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Veja que  $q_2$  não aparece em  $L$ . As derivadas totais em relação ao tempo ficam

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2\ddot{q}_1 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2q_1\dot{q}_1$$

Como as equações de Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

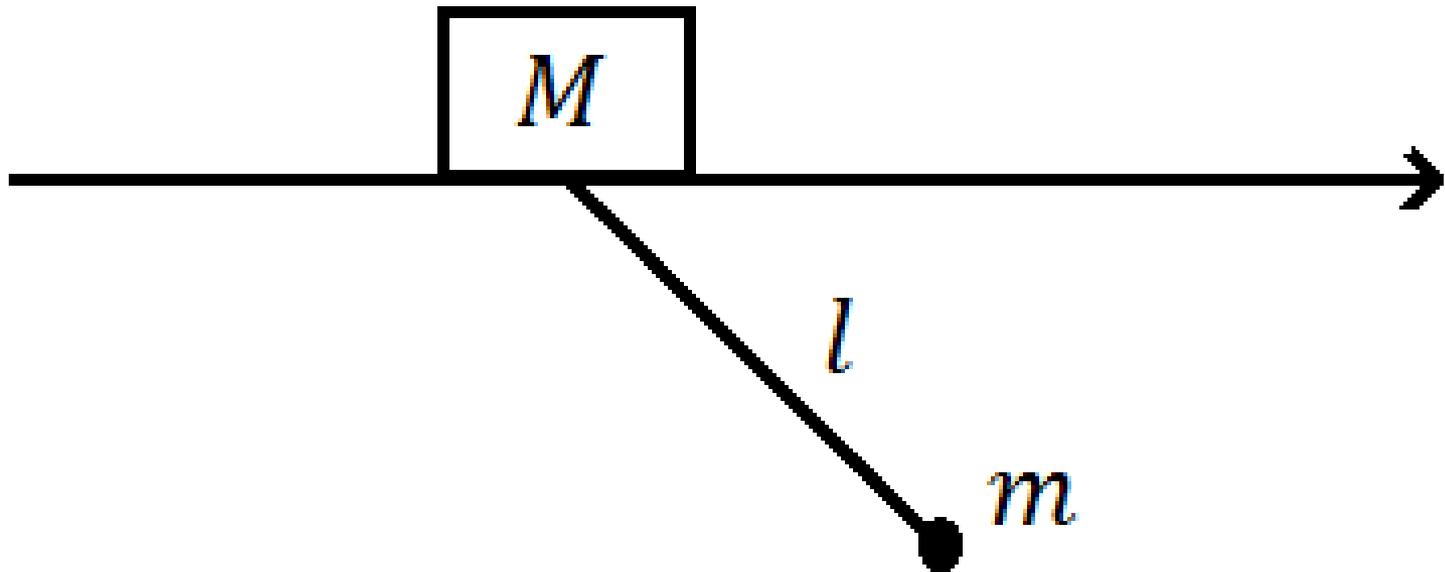
de forma que as duas equações de movimento ficam

$$\ddot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 = 0 \quad 2q_1\dot{q}_1 - 0 = 0$$

# Dinâmica Lagrangiana

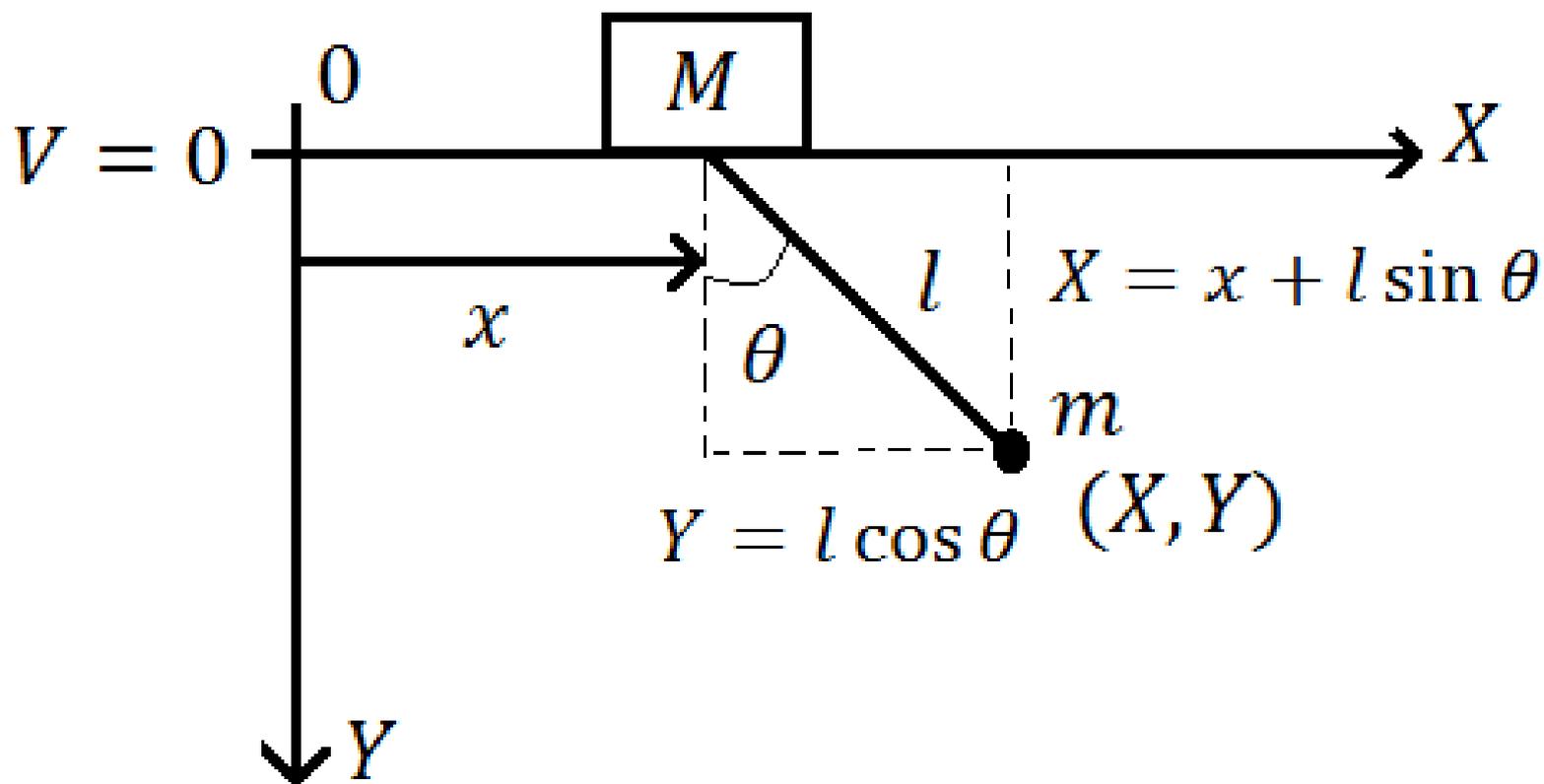
## Exemplo 16:

Determine a equação de Lagrange e as equações de movimento para um pêndulo com suporte livre (a massa  $M$  pode se mover livremente sem atrito no plano horizontal, enquanto o pêndulo oscila no plano vertical).



## Exemplo 16:

Refazendo o desenho e tomando o nível de referencia na origem, temos



## Exemplo 16:

---

Podemos escrever as energias cinética e potencial

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

$$V_M = 0 \quad e \quad V_m = -mgY, \quad \text{logo} \quad V = -mgY$$

Como

$$\begin{aligned} X = x + l \sin \theta & \quad \rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ Y = l \cos \theta & \quad \rightarrow \quad \dot{Y} = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Logo

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

## Exemplo 16:

---

Podemos reescrever as energias cinética e potencial como

$$T = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

A lagrangiana fica

$$L = T - V = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

## Exemplo 16:

---

**OBS:** A energia cinética e a energia potencial que aparecem na equação de Lagrange só pode ser escrita em relação a um referencial inercial. Isto se deve ao fato das equações de Lagrange terem sido deduzidas do princípio de d’Lambert e esse princípio envolve a aplicação da 2ª lei de Newton que é válida apenas para referenciais inerciais.

Um erro comum é escrever a energia cinética em relação ao suporte (massa  $M$  em movimento), que em geral executa um movimento acelerado.

$$v^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad T = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2$$

## Exemplo 16:

---

$$L = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

Podemos, agora, determinar as equações de movimento

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [(m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta] - 0 = 0$$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

## Exemplo 16:

---

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

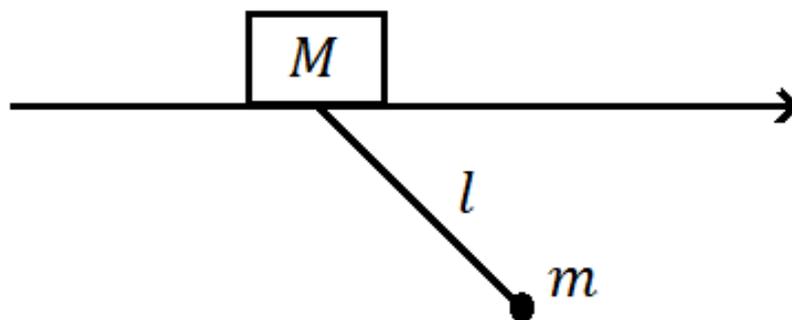
$$\frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x} \cos \theta] - [-ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta] = 0$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

## Exemplo 16:

Como as equações de movimento são difíceis de resolver (equações não lineares – não existe um método geral de resolução, cada caso é um caso), vamos analisar alguns casos limites (particulares) afim de verificarmos se essas equações estão corretas.



1º) Se  $m = 0$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

$$(0 + M)\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad M \text{ se move como um corpo livre}$$

## Exemplo 16:

---

2º) Se  $M \rightarrow \infty$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

Divide-se todos os termos por M

$$\frac{(m + M)\ddot{x}}{M} + \frac{ml\ddot{\theta} \cos \theta}{M} - \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{M} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$$

Substituindo  $\ddot{x} = 0$  na segunda equação de movimento ( $ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$ ) e dividindo por  $ml^2$ , obtemos

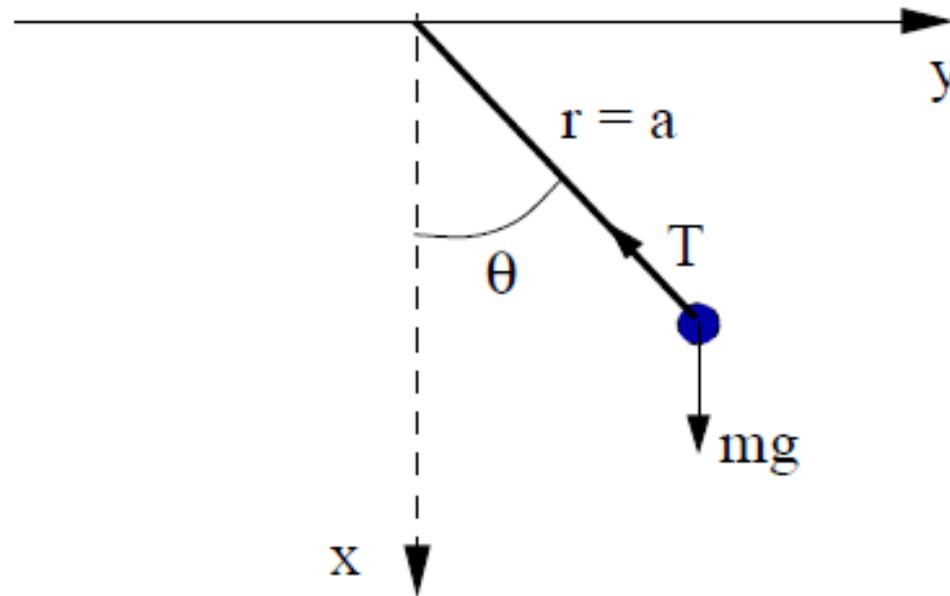
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

que corresponde a equação do pêndulo simples com ponto de suspensão fixo.

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 17

Considere o pêndulo simples da figura abaixo. Em coordenadas polares o raio é fixo  $r = a$  e  $\theta$  é a única coordenada livre. A transformação de  $x, y$  para  $\theta$  é  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . A energia cinética é obtida calculando-se



$$\dot{x} = -a\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta} \cos \theta$$

## Exemplo 17

---

A energia cinética é obtida calculando-se

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = ma^2\dot{\theta}^2/2$$

$$V = -mgx = -mga \cos \theta$$

Como o lagrangiano é dado por  $L = T - V$

Obtemos

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

## Exemplo 17

---

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

Equações de Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mga \sin \theta$$

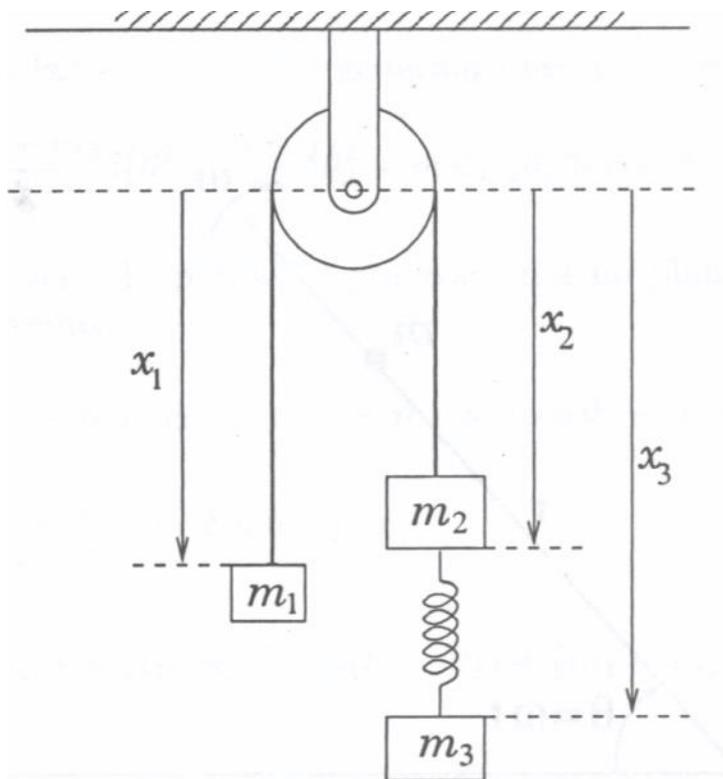
e a equação de movimento fica

$$ma^2\ddot{\theta} - mga \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad a\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 18:

Obter a lagrangiana e as respectivas equações de Lagrange para o sistema mecânico representado, considerando desprezível as massas da roldana e do fio inextensível, e que o comprimento natural da mola é  $l$ .



## Solução:

Supondo que o fio permaneça sempre esticado, o vínculo

$$x_1 + x_2 = l_0$$

$l_0$  é uma constante determinada pelo comprimento do fio e pelo raio da roldana, mostra que somente duas das três coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  podem ser tomadas como

## Exemplo 18

---

### Solução:

Supondo que o fio permaneça sempre esticado, o vínculo

$$x_1 + x_2 = l_0$$

$l_0$  é uma constante determinada pelo comprimento do fio e pelo raio da roldana, mostra que somente duas das três coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  podem ser tomadas como coordenadas generalizadas – o sistema possui dois graus de liberdade. Escolhemos  $x_2$  e  $x_3$  como coordenadas generalizadas.

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2$$

porque  $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

## Exemplo 18

---

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que passa no centro da polia, temos

$$x_1 + x_2 = l_0 \Rightarrow x_1 = l_0 - x_2$$

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

$$V = -(m_2 - m_1) g x_2 - m_1 g l_0 - m_3 g x_3 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

A lagrangiana é

$$L = T - V$$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + (m_2 - m_1) g x_2 + \\ + m_1 g l_0 + m_3 g x_3 - \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

## Exemplo 18

---

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_1)g - k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow m_3\ddot{x}_3 - [m_3 g + k(x_3 - x_2 - l)] = 0$$

Se  $k = 0$  não há interação entre  $m_2$  e  $m_3$ . Neste caso limite as equações de Lagrange preveem corretamente que  $m_3$  cai em queda livre ( $\ddot{x}_3 = g$ ) e que a aceleração  $\ddot{x}_2 = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}$  da massa  $m_2$  coincide com a obtida no tratamento da máquina de Atwood pelo princípio de d'Alembert.

## Exemplo 18

---

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + (m_2 - m_1)gx_2 + m_3gx_3 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2 + m_1gl_0$$

Temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = (m_1 + m_2)\dot{x}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = (m_2 + m_1)g + k(x_3 - x_2 - l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3\dot{x}_3 \quad \frac{\partial L}{\partial x_3} = m_3g + k(x_3 - x_2 - l)$$

As equações de Lagrange são

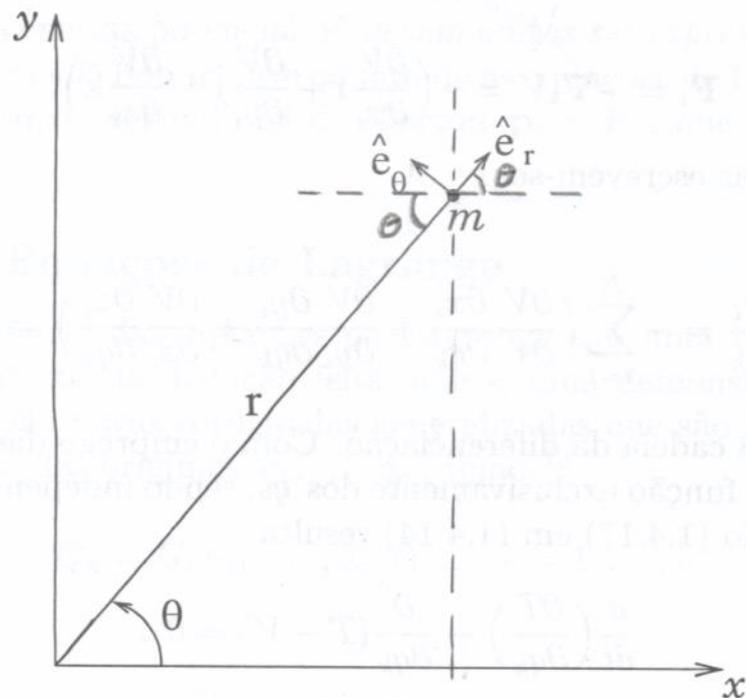
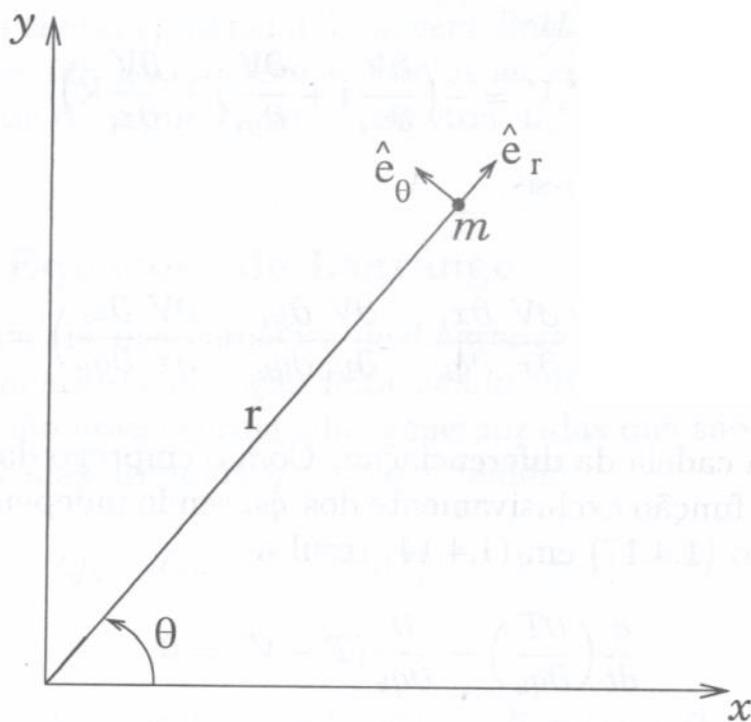
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_1)g - k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow m_3\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 19:

Uma partícula move-se num plano e coordenadas polares são empregadas para a descrição do movimento. O vetor posição da partícula escreve-se  $\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$ .



## Exemplo 19

---

As componentes da força generalizada são

$$Q_1 \equiv Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = F_r$$

$$Q_2 \equiv Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \vec{F} \cdot (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = r \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta = r F_\theta$$

Onde  $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$  e  $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$  são os unitários radial e angular representados na figura.

Usando

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad , \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

a energia cinética expressa em termos de coordenadas polares é

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

## Exemplo 19

---

Portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \rightarrow \frac{d}{dt} mr^2\dot{\theta} = rF_\theta$$

Verifica-se portanto que  $rF_\theta$  é a componente normal ao plano do movimento do torque em relação à origem, enquanto  $mr^2\dot{\theta}$  é a componente do momento angular. Desenvolvendo explicitamente a derivada temporal, as equações de movimento anteriores tornam-se

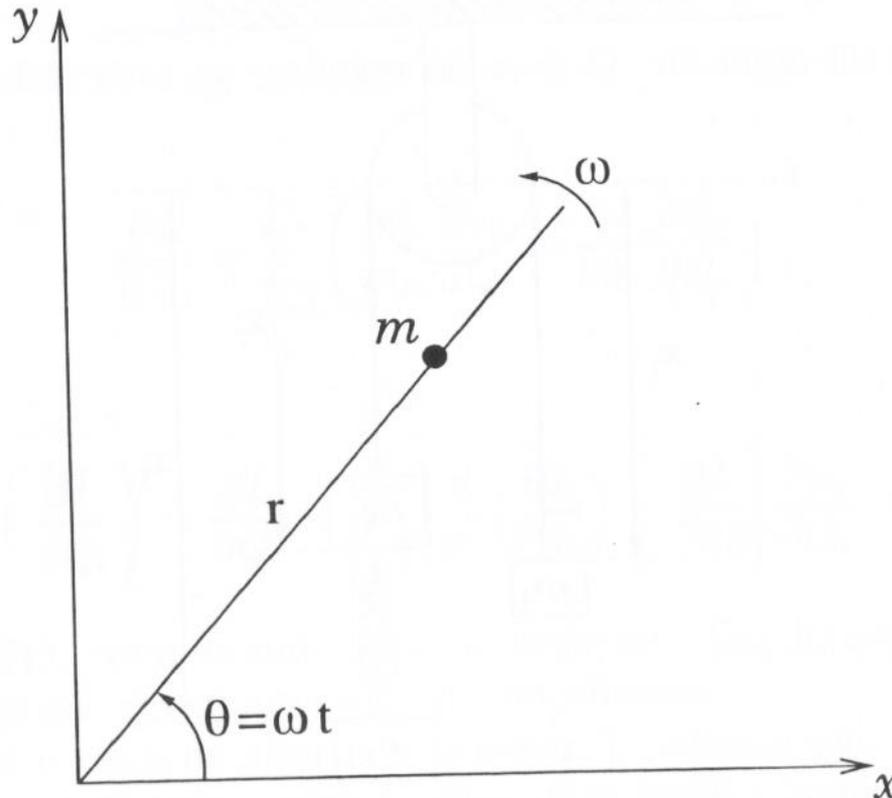
$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \quad , \quad mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_\theta \quad ,$$

que são simplesmente as componentes polares da equação de movimento de Newton.

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 20:

Uma conta desliza ao longo de uma haste retilínea lisa que gira com velocidade angular constante num plano horizontal. Descreva seu movimento pelo formalismo de Lagrange.



## Exemplo 20

---

### Solução:

Seja  $xy$  o plano horizontal que contém a haste e usemos as coordenadas polares para localizar a massa  $m$ . As variáveis  $r, \theta$  não podem ser tomadas como coordenadas generalizadas porque  $\theta$  é forçada a obedecer à restrição  $\theta - \omega t = 0$ , que é um vínculo holônomo da forma  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular da haste, suposta conhecida. O sistema possui somente um grau de liberdade (movimento radial) e podemos escolher  $q_1 = r$  como coordenada generalizada. A energia cinética pode ser escrita na forma

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

Onde usamos  $\dot{\theta} = \omega$ .

## Exemplo 20

---

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano do movimento, a lagrangiana do sistema se reduz à energia cinética:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

Dispondo da lagrangiana expressa exclusivamente em função de  $r$  e  $\dot{r}$ , a equação de movimento do sistema é imediatamente obtida:

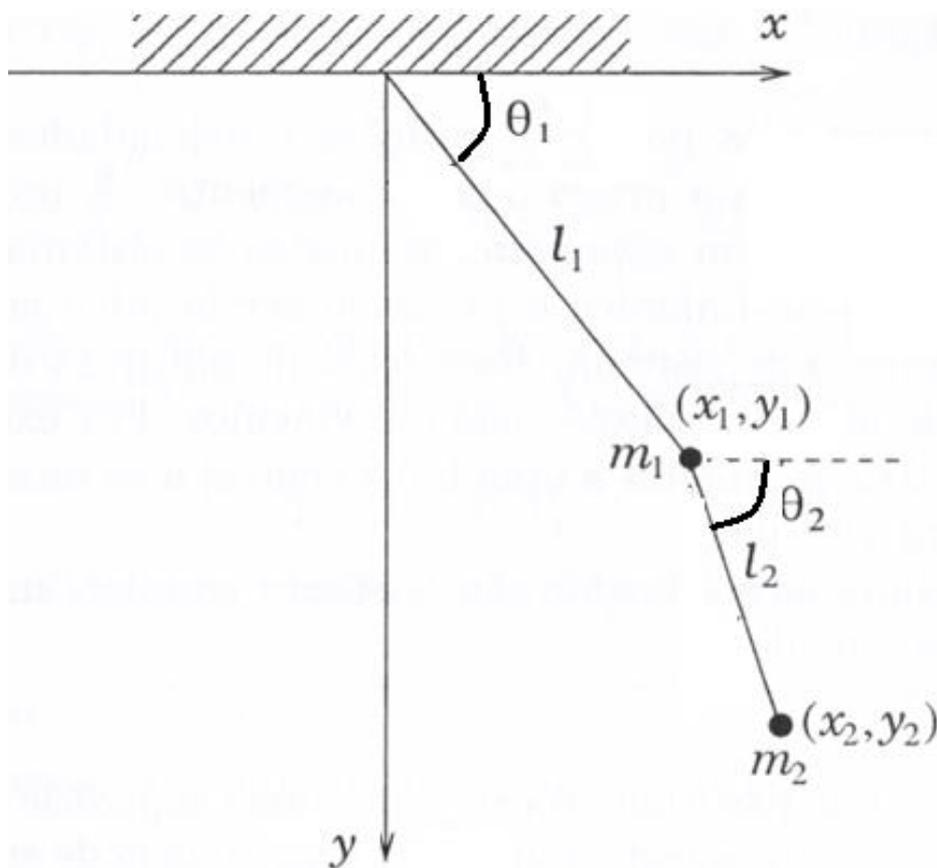
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\omega^2 r = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = \omega^2 r$$

Conclui-se que a conta tende a se afastar do eixo de rotação em consequência da “força centrífuga”, que é o resultado bem conhecido.

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 21:

Aplicar o formalismo lagrangiano para obter as equações de movimento de um pêndulo duplo plano.



## Exemplo 21

---

Sejam  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  as coordenadas cartesianas das mas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Tomando-se os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  como coordenadas generalizadas, temos

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1 \qquad y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \qquad y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

donde

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

## Exemplo 21

---

A energia cinética relativa ao referencial supostamente inercial  $(x, y)$  é

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

que, em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, escreve-se

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

## Exemplo 21

---

Por outro lado, com o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que contém o ponto de suspensão de  $m_1$ , temos

$$V = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2$$

Finalmente, a lagrangiana  $L = T - V$  é dada por

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2$$

## Exemplo 21

---

Usando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1$$

a equação de Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$

toma a forma

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

## Exemplo 21

---

De modo inteiramente análogo, obtemos a segunda das equações de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \dots$$

a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

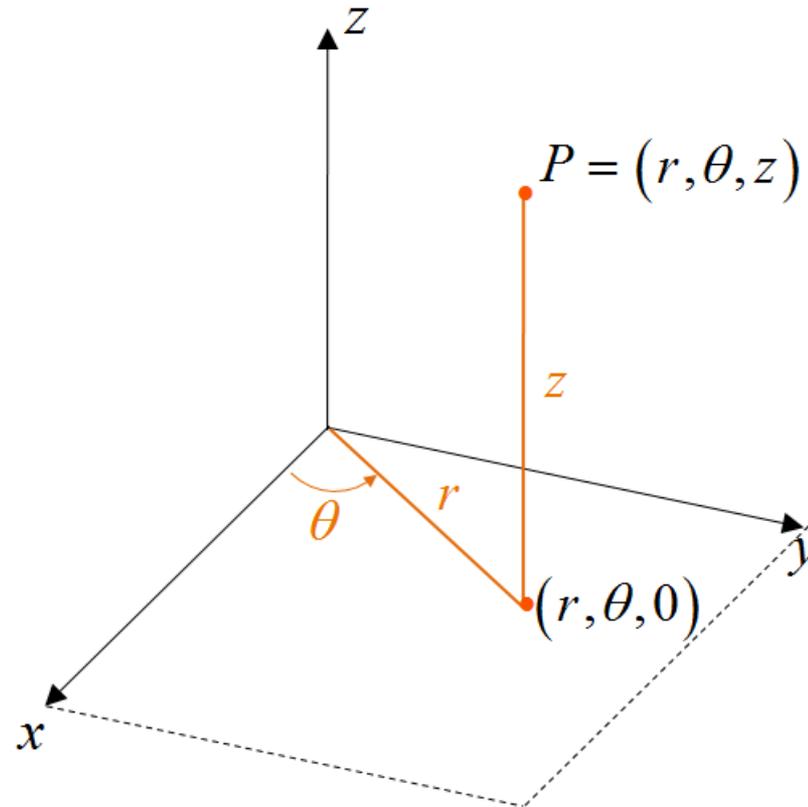
Obtém-se

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 22:

Uma partícula de massa  $m$  move-se em um campo de força conservativo. Ache (a) a função lagrangiana, (b) as equações do movimento em coordenadas cilíndrica  $(r, \theta, z)$ .



## Exemplo 22

---

### Solução:

(a) A energia cinética total em coordenadas cilíndricas

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2]$$

A energia potencial  $V = V(r, \theta, z)$ . Então a função lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] - V(r, \theta, z)$$

(b) As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left( mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$\rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

## Exemplo 22

---

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\rightarrow m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

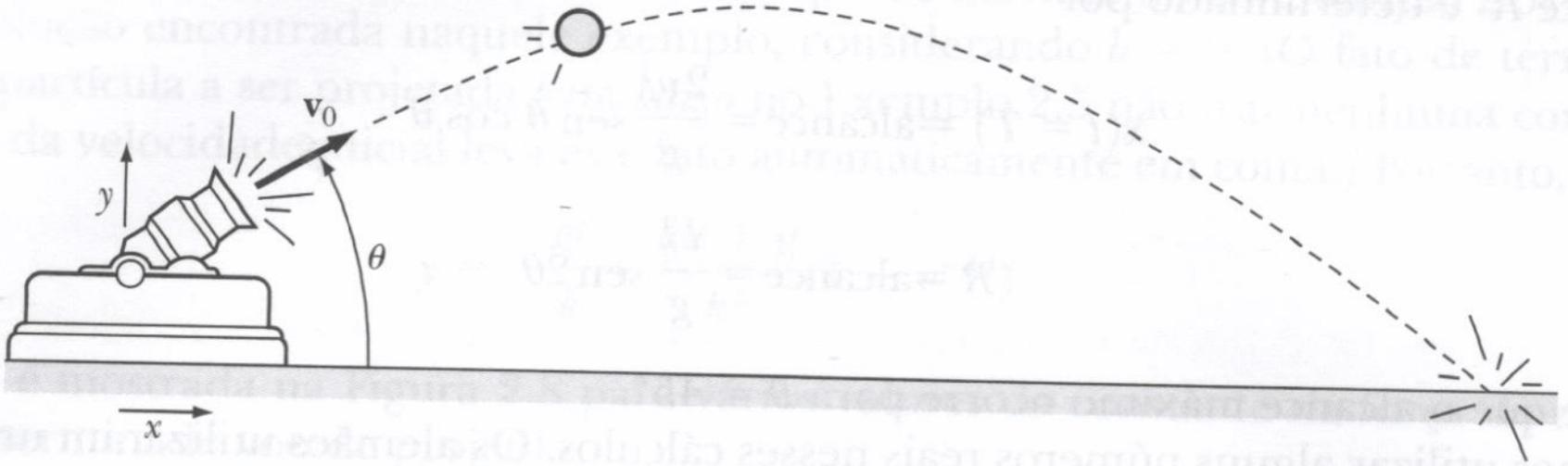
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{z} = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 23:

Considere o caso do movimento de projeteis sob a gravidade em duas dimensões. Encontre as equações de movimento nas coordenadas (a) cartesianas e (b) polares.



## Exemplo 23

---

### Solução:

(a) Em coordenadas cartesianas, podemos escrever

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad V = mgy$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + mg = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} = -g$$

## Exemplo 23

---

(b) Em coordenadas polares, podemos escrever

$$T = \frac{1}{2} m \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 \quad V = mgr \sin \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 - mgr \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0 \rightarrow \\ \rightarrow r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta - \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) - mgr \cos \theta = 0 \rightarrow \\ \rightarrow -2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} - gr \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

## Exemplo 23

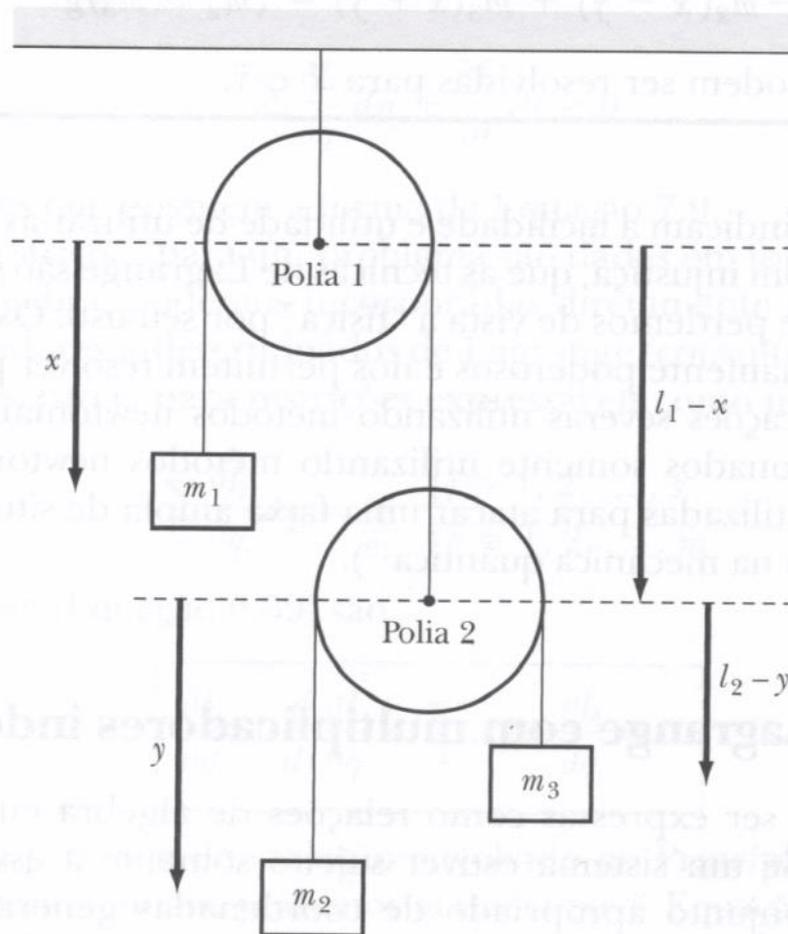
---

As equações de movimento em coordenadas cartesianas são mais simples que as equações em coordenadas polares. Devemos escolher as coordenadas cartesianas como as coordenadas para resolver o problema. A chave para esse reconhecimento foi que a energia potencial do sistema depende somente da coordenada  $y$ . Nas coordenadas polares, a energia potencial dependia tanto de  $r$  como de  $\theta$ .

# Dinâmica Lagrangiana

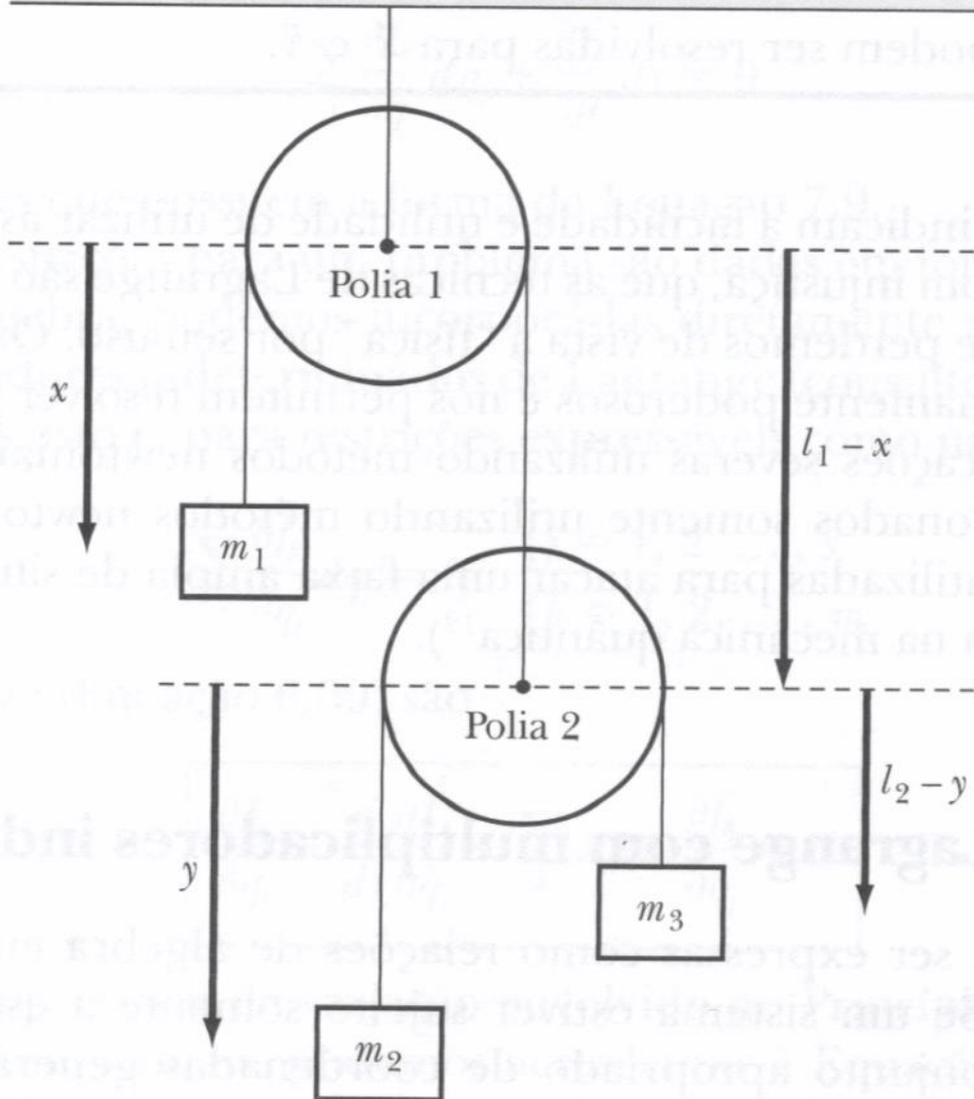
## Exemplo 24:

Considere o sistema de polia dupla mostrado na figura. Utilize as coordenadas indicadas e determine as equações do movimento.



Considere as polias sem massa.

## Exemplo 24:



$$y_1 = x$$

$$y_2 = l_1 - x + y$$

$$y_3 = l_1 - x - l_2 - y$$

$$l_1 = cte$$

$$l_2 = cte$$

## Exemplo 24:

---

### Solução:

Considere as polias como sem massa e estabeleça  $l_1$  e  $l_2$  como os comprimentos da corda livremente suspensa de cada uma das duas polias. As distâncias  $x$  e  $y$  são medidas do centro das duas polias.

$$m_1: \quad v_1 = \dot{x}$$

$$m_2: \quad v_2 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y}$$

$$m_3: \quad v_3 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + l_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{x} - \dot{y})^2$$

## Exemplo 24:

---

Entalecemos a energia potencial  $V = 0$  em  $x = 0$ .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -m_1gy_1 - m_2gy_2 - m_3gy_3$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

Simplificando, temos

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

## Exemplo 24:

---

Como  $T$  e  $V$  foram determinados, as equações de movimento podem ser obtidas utilizando

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

$$L = T - V$$

$$L = \left[ \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \right] - [-m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)]$$

## Exemplo 24:

---

As equações de movimento podem ser obtidas utilizando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

que também pode ser escrita em função de  $x$  e  $y$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Os resultados são:

$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} - \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3)g$$

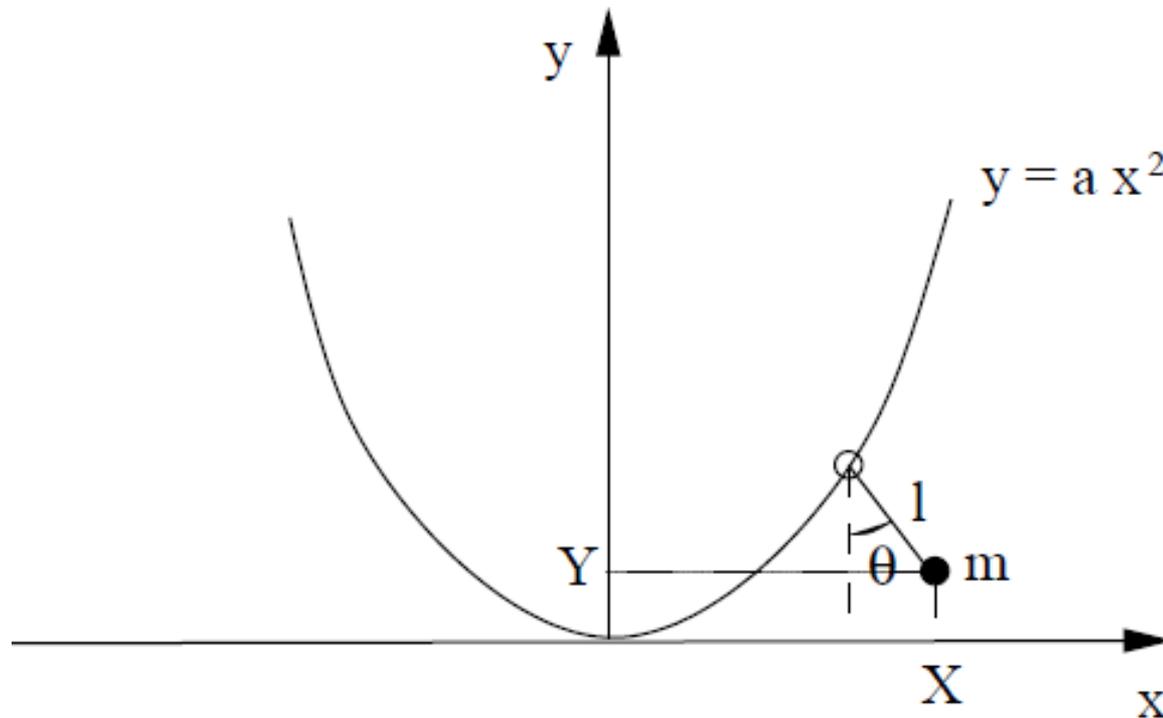
e

$$-m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3)g$$

# Dinâmica Lagrangiana

## Exemplo 25:

Pendulo com apoio em parábola. Como ilustração adicional considere um pêndulo cujo ponto de suspensão desliza sem atrito sobre uma parábola  $y = ax^2$ .



## Exemplo 25:

---

As coordenadas do ponto de apoio são  $x$  e  $y$ , as da massa são  $X$  e  $Y$  e  $\theta$  é o ângulo que o fio do pendulo faz com a vertical. O sistema tem dois graus de liberdade e as coordenadas generalizadas podem ser escolhidas como  $x$  e  $\theta$ . As equações que conectam a posição da partícula com  $x$  e  $\theta$  são:

$$\begin{aligned} X &= x + l \sin \theta & \dot{X} &= \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta \\ Y &= ax^2 - l \cos \theta & \dot{Y} &= 2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

As energias cinética e potencial são

$$T = \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]$$

$$V = mgY = mg(ax^2 - l \cos \theta)$$

## Exemplo 25:

---

A Lagrangeana é

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] - mg(ax^2 - l \cos \theta)$$

Fica como exercício escrever as equações de movimento.

# Dinâmica Lagrangiana

---

## ➤ Potenciais Generalizados

Quando as forças generalizadas resultam de uma função  $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  por meio das expressões

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k$$

então a lagrangiana fica definida por

$$L = T - U$$

onde função  $U$  é chamada **potencial generalizado** ou **potencial dependente das velocidades**.

## Dinâmica Lagrangiana

---

A classe de forças abrangidas pela equação  $Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$  é mais ampla do que o conjunto das forças conservativas, estas últimas constituindo um caso particular em que  $U$  independe das velocidades generalizadas e do tempo. Um exemplo importante é a força eletromagnética sobre uma carga em movimento.

Continuam válidas as equações de movimento de Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

onde  $k = 1, \dots, n$ .

# Dinâmica Lagrangiana

---

## OBS:

- i. A formulação lagrangiana só pode ser utilizada em sistemas conservativos (forças conservativas) ou, pelo menos, admitir um potencial generalizado que dependa das coordenadas de velocidade.*
- ii. Se houver forças dissipativas, como por exemplo, atrito viscoso num líquido, um corpo se movendo no ar à baixas velocidades, não cabem na formulação lagrangiana. Podemos usar, nestes casos, a função de dissipação de Rayleigh.*

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

---

Determinar a lagrangiana de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo.

A força experimentada por uma carga elétrica e em movimento num campo eletromagnético externo é a força de Lorentz (em unidades CGS gaussianas)

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B} \right)$$

As equações de Maxwell permitem escrever os campos em termos de um potencial escalar  $\phi(\vec{r}, t)$  e de um potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  da seguinte maneira:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Utilizando como coordenadas as próprias coordenadas cartesianas da partícula, as componentes da força generalizada coincidem as componentes cartesianas da força de Lorentz. Considere, portanto

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\}$$

Pretendemos mostrar que  $\vec{F}$  pode ser representada na forma  $Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$  para alguma função U. Mas em  $Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$  aparece uma derivada *total* em relação ao tempo, ao passo que em

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\} \quad \text{a derivada é parcial.}$$

Podemos introduzir uma derivada total em

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\} \quad \text{notando que}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Usando ainda

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A},$$

pois o operador *nabla* só afeta as variáveis de posição, podemos escrever

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{1}{c} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Com o uso do operador  $\vec{\nabla}_v = \frac{\hat{i}\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{\hat{j}\partial}{\partial \dot{y}} + \frac{\hat{k}\partial}{\partial \dot{z}}$  e levando em conta que as coordenadas e velocidades generalizadas são tratadas como quantidades independentes, ficamos com

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \left( \phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \right\} - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \left( e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{d}{dt} \left[ \vec{\nabla}_v \left( e\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \right]$$

pois  $\phi$  e  $\vec{A}$  não dependem da velocidade

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

---

Levando-se em conta que  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ , a força  $\vec{F}$  assume a forma da equação  $Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$  com

$$U = e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

de modo que

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

É a lagrangeana de uma partícula carregada num campo eletromagnético externo.

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

---

O momento canônico é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i(\vec{r}, t) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

**OBS:** no sistema internacional o termo  $\frac{1}{c}$  desaparece e a expressão da lagrangiana fica

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + e\vec{v} \cdot \vec{A}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

---

Vamos construir a lagrangiana de uma partícula livre relativística. Uma quantidade invariante de Lorentz envolvendo diretamente as coordenadas do espaço-tempo (de Minkowski, sem gravidade) é a métrica descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

A ação da partícula livre relativística pode ser proporcional a integral de qualquer potencia de  $ds$ . Vamos, por simplicidade, considerar a ação na forma

$$S = \alpha \int_1^2 ds$$

onde  $\alpha$  é uma constante a ser determinada.

Vamos escrever a expressão numa forma mais conveniente

$$S = \alpha \int_1^2 \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = \alpha c \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

onde  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Aqui podemos identificar a lagrangiana da partícula por

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \alpha c \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

---

No limite não-relativístico,  $v \ll c$ , temos

$$L \approx \alpha c \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] = \alpha c - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2$$

O primeiro termo desta equação é uma constante, que não altera as equações de movimento pois estas são obtidas por derivação de  $L$ .

O segundo termo  $-\frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2$  deve ser identificado como a energia cinética não relativística  $\frac{1}{2} m v^2$ , onde  $m$  é a massa de repouso da partícula; então  $\alpha = -mc$ . Logo

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

Daqui podemos obter quantidades importantes como o momento relativístico e a energia relativística da partícula. Vejamos primeiro o momento relativístico. Notando que  $v^2 = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2$ , temos

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[ 1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= -mc^2 \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(-2\dot{x}_i)}{c^2} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\therefore p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}$$

$$i = 1, 2, 3$$