MECÂNICA ANALÍTICA – PARTE 1

Mecânica Analítica

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE

Campus CAVG

PRONECIM

Programa Núcleo de Estudos em Ciências e Matemática

Dinâmica Newtoniana (Revisão)

Licenciatura em Física

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Conceitos de velocidade e aceleração

1. Obtenha as equações de movimento para o caso de aceleração constante no movimento unidimensional.

Solução: considerando que o movimento ocorra sobre o eixo x, temos: (não há necessidade de usar a notação vetorial, pois fica implícito que a direção é o eixo x e o sentido fica a menos de um sinal.

$$v = \frac{dx}{dt}\,(1);\, a = \frac{dv}{dt}\ (2)$$

Como a aceleração é constante, podemos obter de (2) a solução para v, $v(t) = at + c_1$, onde c_1 é uma constante que corresponde à velocidade no instante $t = 0$. Chamando a velocidade nesse instante de v_0, temos a relação

$$v(t) = v_0 + at$$

Conceitos de velocidade e aceleração

Usando a relação (1), temos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

O que também nos permite obter diretamente solução para x,

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + c_2$$

Onde c_2 é indicada como a posição no instante $t = 0$. Chamando essa quantidade de x_0, temos

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Conceitos de velocidade e aceleração

2. Seja o movimento de uma partícula sobre o eixo x. A posição da partícula em cada instante é dada por

$$x(t) = t^3 - 7{,}5t^2 + 18t + 3 \ (SI)$$

a) Qual a posição da partícula no instante $t = 0$? E no instante $t = 1\ s$? E para t infinito?

b) Em que instante a partícula para?

c) Qual a região em que a partícula está em movimento acelerado? Qual a região onde o movimento é retardado?

d) Calcule $a(t)$.

Respostas:

a) 3 m, 14,5 m e $x \to \infty$.

b) t = 2,0 s e t = 3,0 s

c) t < 2,0 s Retardado; 2,0 < t < 2,5 s Acelerado; 2,5 < t < 3,0 s Retardado; t > 3,0 s Acelerado

d) $a(t) = 6t - 15$

Conceitos de velocidade e aceleração

3. Uma partícula, também em movimento unidimensional, possui aceleração dada por $a(t) = t^2 - 1\ (m/s^2)$.

a) Sabendo-se que no instante $t = 0$ a velocidade é nula, calcule a velocidade da partícula num instante qualquer. Qual a velocidade da partícula para $t = 1s$? E para $t = 2s$?

b) Sabendo-se ainda que no instante $t = 0$ a partícula está na posição $x = 1\ m$, calcule a posição da partícula num instante qualquer. Qual a posição para $t = 1\ s$? E para $t = 2\ s$?

c) Onde a partícula para?

d) Qual a velocidade e a aceleração medias entre os instantes $t = 1\ s$ e $t = 2\ s$?

Respostas:

a) $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - t \quad v(1) = -0{,}7\ {}^{m}/_{s} \quad v(2) = 0{,}7\ {}^{m}/_{s}$

b) $x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1 \quad x(1) = 0{,}6m \quad x(2) = 0{,}3m$

c) $x = 1m \ \ e\ x = 0{,}25m$ d) $v_m = -0{,}3\ {}^{m}/_{s} \quad e \quad a_m = 1{,}4\ {}^{m}/_{s^2}$

Conceitos de velocidade e aceleração

4. Um corpo está se movendo em linha reta. Sua aceleração é dada por $a = -2x$, onde x é medido em metros e a em ${}^{m}/_{s^2}$. Ache a relação entre a velocidade e a distância, dado que $x_0 = 0, v_0 = 4\,{}^{m}/_{s}$.

Solução:

Usando a regra da cadeia de derivação, podemos escrever

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -2x \quad \Longrightarrow \quad vdv = -2xdx$$

Assim, usando as condições de contorno do problema, temos

$$\int_4^v vdv = -2\int_0^x xdx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(v^2 - 16) = -x^2 \quad \Longrightarrow v = \sqrt{16 - 2x^2}$$

Princípios da Mecânica Newtoniana

Tipos de Interação

Existem quatro tipos de interação:

- **Interação gravitacional**
- **Interação eletromagnética**
- **Interação forte**
- **Interação fraca**

As duas primeiras fazem parte do dia-a-dia. Já as duas ultimas manifestam-se a curta distância, onde só os efeitos quânticos são significativos. Não possuem relações clássicas, semelhante aos casos do eletromagnetismo (força de Lorentz) e da gravitação (Lei da gravitação de Newton).

Princípios da Mecânica Newtoniana

Interação eletromagnética

A força de Lorentz é o nome dado à força que atua sobre uma partícula de carga *q*, possuindo uma velocidade $\vec{v}$, quando na presença de um campo eletromagnético caracterizado pelos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \text{ (SI)}$$

A lei da gravitação universal de Newton dá-nos a força de interação ente duas massas m_1 e m_2, separadas por uma distância *r*. O seu módulo vale:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \text{ (SI)}$$

Princípios da Mecânica Newtoniana

- **Interação forte**: As forças fortes são aquelas responsáveis pelos fenômenos que ocorrem a curta distância no interior do núcleo atômico. A estabilidade nuclear está associada à força forte. É ela que mantém o núcleo unido evitando que os prótons que os constituem, por possuírem a mesma carga elétrica, simplesmente sofram uma intensa repulsão e destruam o próprio átomo. Se a força forte não existisse a matéria que forma o Universo, tal como o conhecemos, também não existiria. Prótons e nêutrons não conseguiriam se formar. Nós, seres humanos, não poderíamos existir. O trabalho pioneiro sobre as forças fortes foi realizado por Yukawa em 1934 mas até meados da década de 1970 não havia, realmente, uma teoria capaz de explicar os fenômenos nuclear. Foi então que surgiu a cromodinâmica quântica.

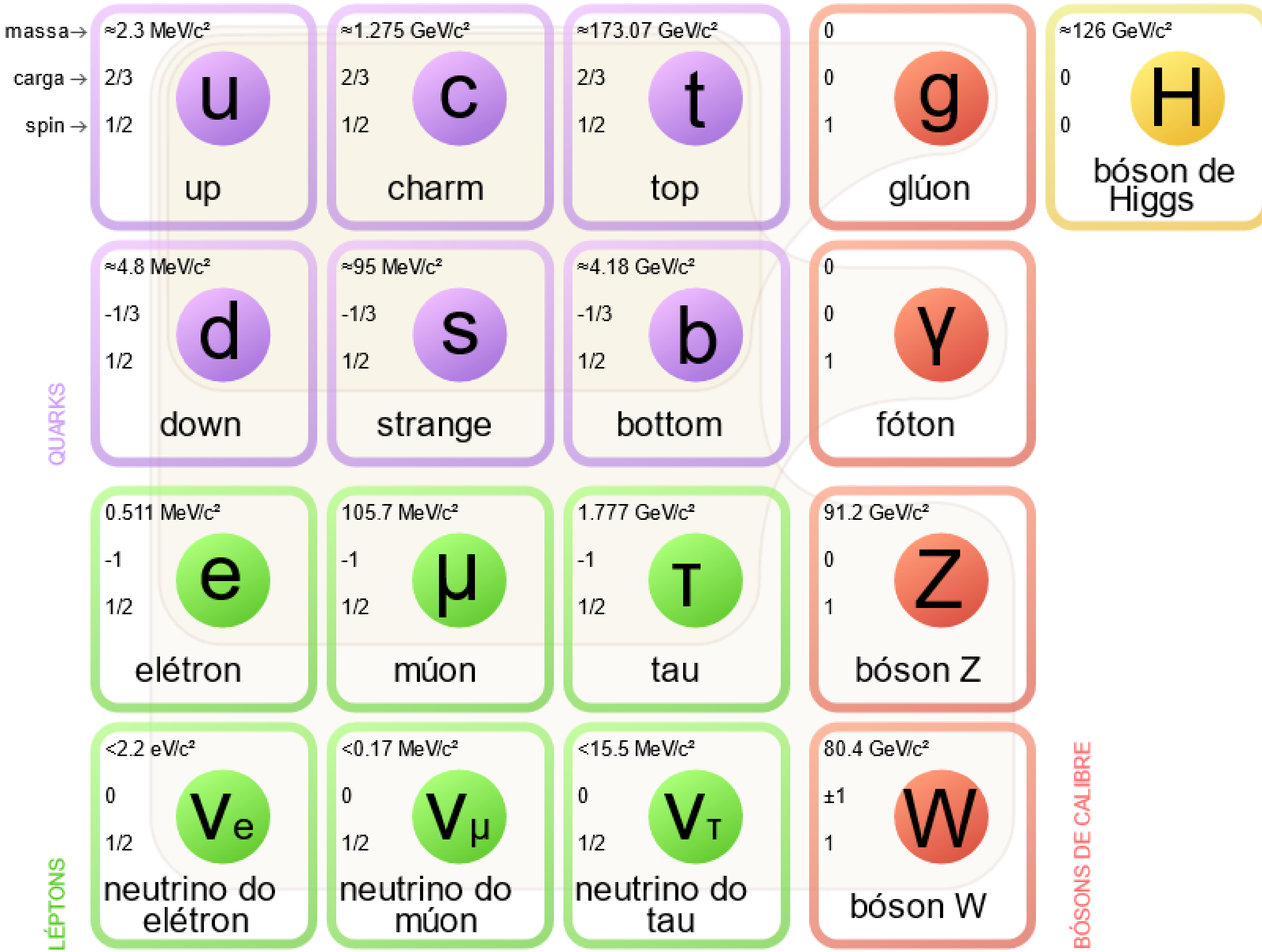
Princípios da Mecânica Newtoniana

- **Interação fraca**: As forças fracas são aquelas que explicam os processos de decaimento radiativo, tais como o decaimento beta nuclear, o decaimento do pion, do muon e de várias partículas "estranhas". É interessante notar que esta força não era conhecida pela física clássica e que sua formulação como teoria é estritamente quântica. A primeira teoria das interações fracas foi apresentada por Fermi em 1933. Mais tarde ela foi aperfeiçoada por Lee, Yang, Feynman, Gell-Mann e vários outros nos anos da década de 1950. Sua forma atual é devida a Glashow, Weinberg e Salam, que a propuseram nos anos da década de 1960. Correspondem, por exemplo, à força nas interações onde participam os neutrinos.

Princípios da Mecânica Newtoniana

A nova teoria das interações fracas, que é chamada de flavordinâmica por causa de uma das propriedades intrínsecas das partículas elementares, é mais justamente conhecida como Teoria de Glashow-Weinberg-Salam. Nesta teoria, as interações fraca e eletromagnética são apresentadas como manifestações diferentes de uma única força, a força eletrofraca. Esta unificação entre a interação fraca e a interação eletromagnética reduz o número de forças existentes no Universo a apenas 3: força gravitacional, força forte e força eletrofraca.

Princípios da Mecânica Newtoniana



Princípios da Mecânica Newtoniana

Exemplo:

Que tipo de interação é a força de atrito?

Que tipo de interação é a força normal?

OBS: Existem certos topos de forças que não proporcionam nenhumas das quatro interações mencionadas.
Por exemplo, a força que sentimos quando estamos dentro de um ônibus e este faz uma curva, ou freia, ou acelera. Outro exemplo é a força que atua sobre a água em um balde quando amarrado a uma corda e posto a girar num movimento circular (a força impede que a agua derrame).

Princípios da Mecânica Newtoniana

Leis do movimento

Os postulados enunciados a seguir equivalem às três leis do movimento de Newton, mas procuram evitar certas dificuldades lógicas da proposição original

Primeira Lei

- Uma partícula livre está em repouso ou MRU.
- Existem sistemas de referência, ditos *inerciais* em relação aos quais toda partícula isolada descreve um MRU.
- A existência de um referencial inercial implica a existência de uma infinidade de outros, todos movendo-se em linha reta com velocidade constante.

Princípios da Mecânica Newtoniana

- Neste postulado está implícita a noção newtoniana de tempo absoluto, que "flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa" e é o mesmo em todos referenciais inerciais.

Segunda Lei

Quando uma partícula interage, seu estado de movimento é alterado da seguinte maneira

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

Onde $\vec{F}$ é a resultante das forças que atuam sobre a partícula e $\vec{p}$ é o seu momento linear, cuja definição clássica é

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Princípios da Mecânica Newtoniana

- **Segunda Lei**

Em qualquer referencial inercial o movimento de uma partícula é regido pela equação:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

- Este postulado pressupõe, implicitamente, que cada partícula está associada uma constante positiva *m*, denominada massa, que é a mesma em todos os referenciais inerciais.

Princípios da Mecânica Newtoniana

Terceira Lei

- Quando duas partículas interagem, a força numa delas possui o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários à força que atua na outra.
- A cada ação corresponde uma reação igual e oposta, isto é, se $\vec{F}_{ij}$ é a força sobre a partícula *i* exercida pela partícula *j*, então

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

  - Esta é a lei da ação e reação na sua forma fraca.
  - Na sua versão forte, esta lei declara que, além de iguais e opostas, as forças são dirigidas ao longo da linha que une as partículas. Isto significa que duas partículas só podem se atrair ou repelir.
  - Esta lei não tem valida geral, pois as forças entre cargas elétricas em movimento geralmente a violam

Princípios da Mecânica Newtoniana

- **Observações:**

1. A primeira lei de Newton, também chamada de lei da inércia, corresponde à representação do referencial inercial.

2. A segunda lei de Newton não nos diz qual o tipo de interação a que a partícula está sujeita. Ela relaciona a resultante das forças que atuam sobre uma partícula com a variação de seu momento linear em relação ao tempo. Esta resultante pode ser de natureza gravitacional ou eletromagnética.

Considere que sobre uma partícula atuem *N* forças, todas provenientes de uma interação (referencial inercial), a segunda lei de Newton fica

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_N} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Princípios da Mecânica Newtoniana

No caso de um sistema contendo várias partículas, supõe-se que a força sobre cada uma delas pode ser decomposta em *forças externas*, produzidas por fontes exteriores ao sistema, e *forças internas*, que se devem as demais partículas do sistema. Assim, a equação do movimento da *i-ésima* partícula de um sistema de N partículas é, conforme a segunda lei,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(e)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

onde

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Princípios da Mecânica Newtoniana

3. Podemos considerar a 1º Lei de Newton decorre da 2º Lei quando fazemos a $\overrightarrow{F_R} = 0$?

O fato de a resultante das forças ser zero e o momento constante não significa que o referencial é necessariamente inercial?

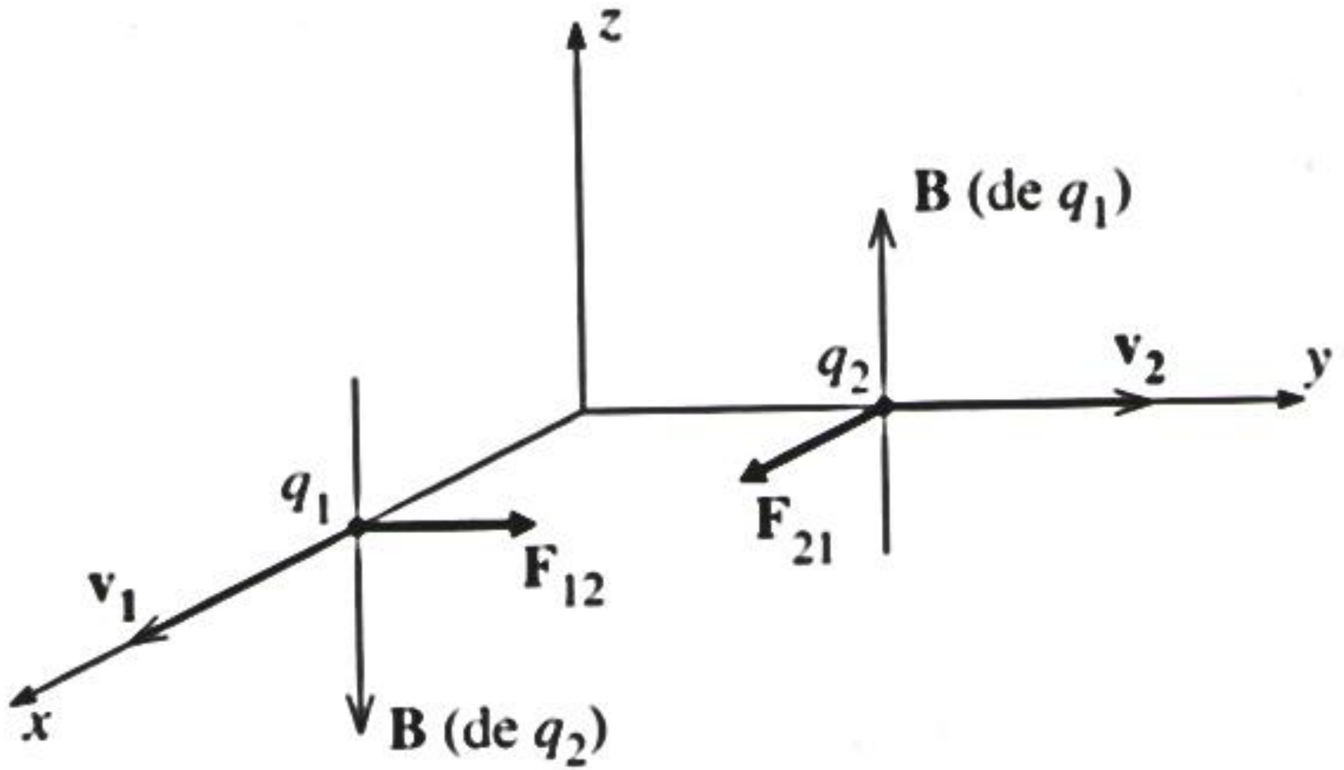
4. A terceira lei é também chama da de lei da ação e reação. É importante ressaltar que o par de forças, corresponde à interação entre duas partículas, contém uma força atuando em cada partícula. **As duas forças, ação e reação nunca podem estar sobre o mesmo corpo**.

Princípios da Mecânica Newtoniana

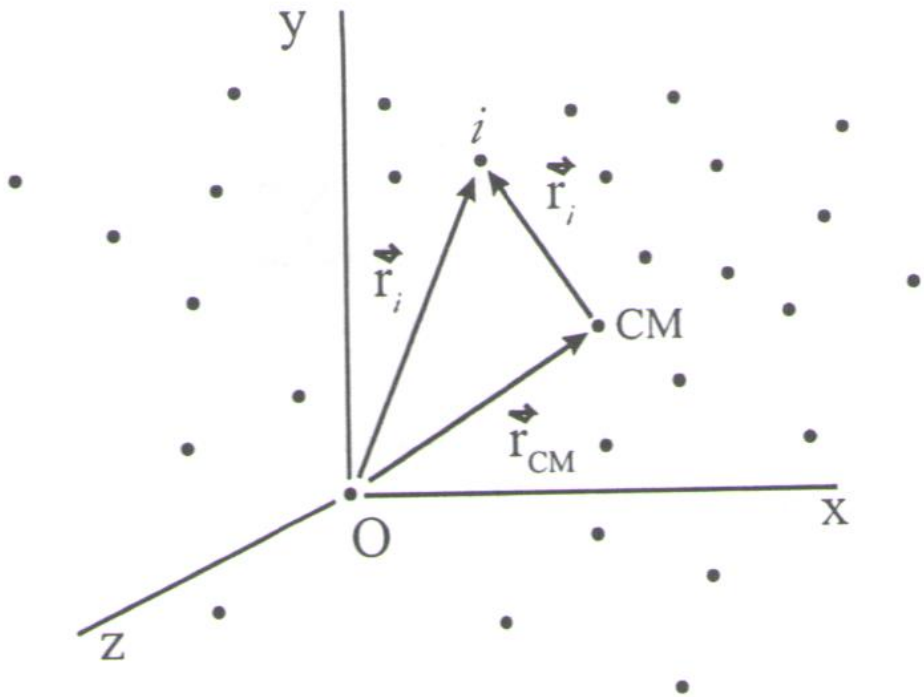
- É importante salientar que este par de forças só ocorre para as forças de interação, isto é, as **forças fictícias não possuem reação**.
- Se o referencial não for inercial, a terceira lei não é válida para todas as forças que existem nesse referencial.
- As leis de Newton subentendem que as interações se processam instantaneamente. Supondo que a interação gravitacional se propague com uma velocidade igual a velocidade da luz no vácuo, termos cerca de 8 min onde a terceira lei não é verificada.

Princípios da Mecânica Newtoniana

- Cada uma das carga oposta q_1 e q_2 produz um campo magnético que exerce uma força sobre a outra carga. As força resultantes $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ não obedecem à terceira Lei de Newton.



Energia mecânica de um sistema de partículas



Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_1 \dot{r}_i{}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_1 v_i{}^2$$

Energia mecânica de um sistema de partículas

$W_{AB} = T_{c,B} - T_{c,A}$ $\Rightarrow$ **Teorema da energia cinética -** Relação válida para qualquer que seja a natureza das forças que atuam no sistema.

$W_{AB} = -\Delta V_{p,AB}$ $\Rightarrow$ Relação válida se as forças que atuam no sistema forem conservativas.

Energia mecânica de um sistema de partículas

⇒ Energia potencial para um sistema de partículas:

$$V_p = \sum_i V_i^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}$$

A primeira parcela representa a energia potencial devido às interações externas e a segunda corresponde as interações internas. O **fator meio** vem do fato de o somatório estar contando duas vezes cada par de partículas.

Sistemas Conservativos e Não-Conservativos

- Se todas as forças atuantes sobre um sistema de partículas forem derivadas de uma função potencial (ou energia potencial) V, então o sistema é chamado de *conservativo*, do contrário é *não conservativo*.

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\nabla E_p$$

➤ Em componentes retangulares de $\vec{F}$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \text{ou}$$

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\vec{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Exemplo 1.

- Uma arma, cuja massa é 0,80 kg, dispara um projétil de massa, de 0,016 kg com velocidade de recuo 700 ms^{-1}. Determine a velocidade de recuo da arma.

Solução: Inicialmente a arma e projétil estão em repouso e a quantidade de movimento total é zero. Após a explosão o projétil move-se para a frente com a quantidade de movimento

$$p_1 = m_1 v_1 = (0{,}016\, kg) \times (700\, ms^{-1}) = 11{,}20\, kgms^{-1}$$

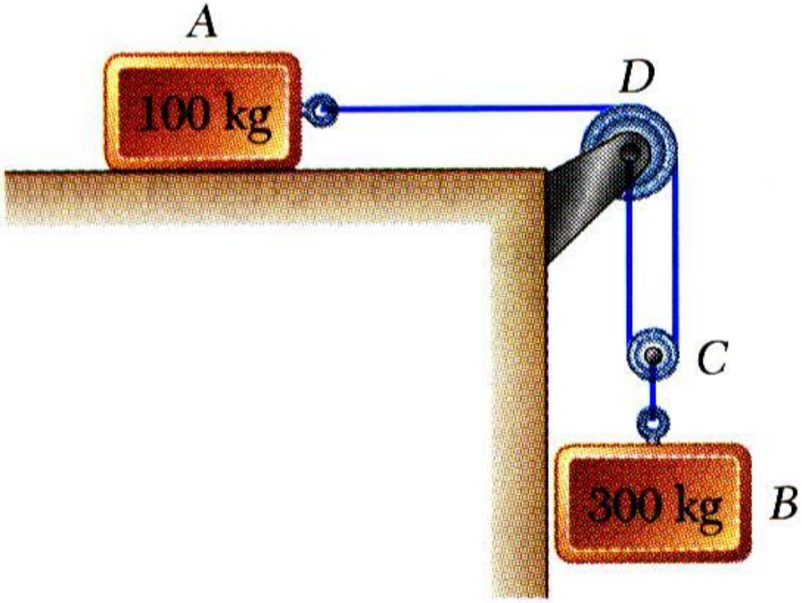
A arma deve, então, recuar com uma quantidade de movimento de mesmo módulo e de sentido contrário. Portanto devemos ter também.

$$p_2 = m_2 v_2 = 11{,}20\, kgms^{-1}$$

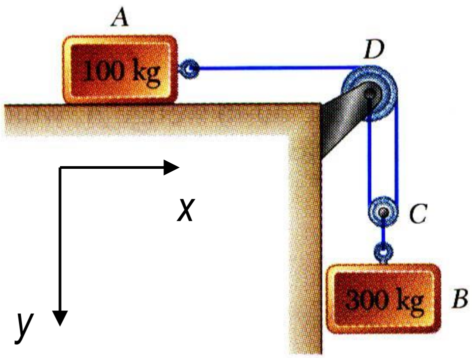
$$v_2 = \frac{11{,}20\, kgms^{-1}}{0{,}80\, kg} = 14{,}0\, ms^{-1}$$

Exemplo 2

Os dois blocos mostrados partem do repouso. Não há atrito entre o plano horizontal e a polia e presume-se que a polia tenha massa desprezível. Determine a aceleração de cada bloco e a tensão em cada corda.



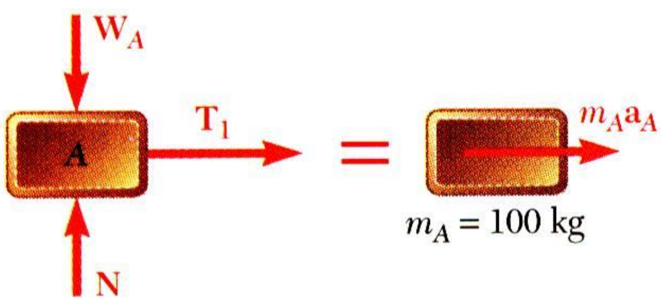
Exemplo 2



SOLUÇÃO:

- Escreva as relações cinemáticas para os movimentos dependentes e acelerações dos blocos.

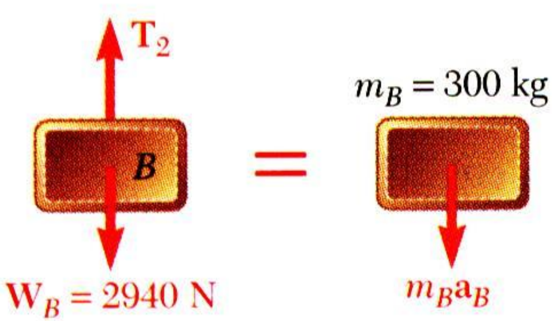
$$y_B = \tfrac{1}{2} x_A \qquad a_B = \tfrac{1}{2} a_A$$



- Escreva as equações de movimento para blocos e polias.

$$\sum F_x = m_A a_A :$$

$$T_1 = (100\,\mathrm{kg})a_A$$



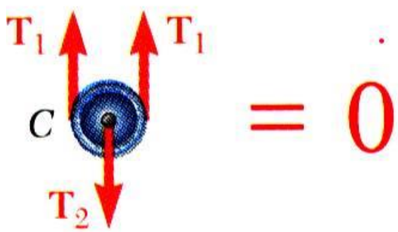
$$\sum F_y = m_B a_B :$$

$$m_B g - T_2 = m_B a_B$$

$$(300\,\mathrm{kg})\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right) - T_2 = (300\,\mathrm{kg})a_B$$

$$T_2 = 2940\,\mathrm{N} - (300\,\mathrm{kg})a_B$$

Exemplo 2



$$\sum F_y = m_C a_C = 0:$$

$$T_2 - 2T_1 = 0$$

- Combine as relações cinemáticas com as equações de movimento para encontrar as acelerações e a tensão em cada corda.

$$y_B = \tfrac{1}{2} x_A \qquad a_B = \tfrac{1}{2} a_A$$

$$T_1 = (100\,\mathrm{kg})a_A$$

$$T_2 = 2940\,\mathrm{N} - (300\,\mathrm{kg})a_B$$
$$= 2940\,\mathrm{N} - (300\,\mathrm{kg})\left(\tfrac{1}{2} a_A\right)$$

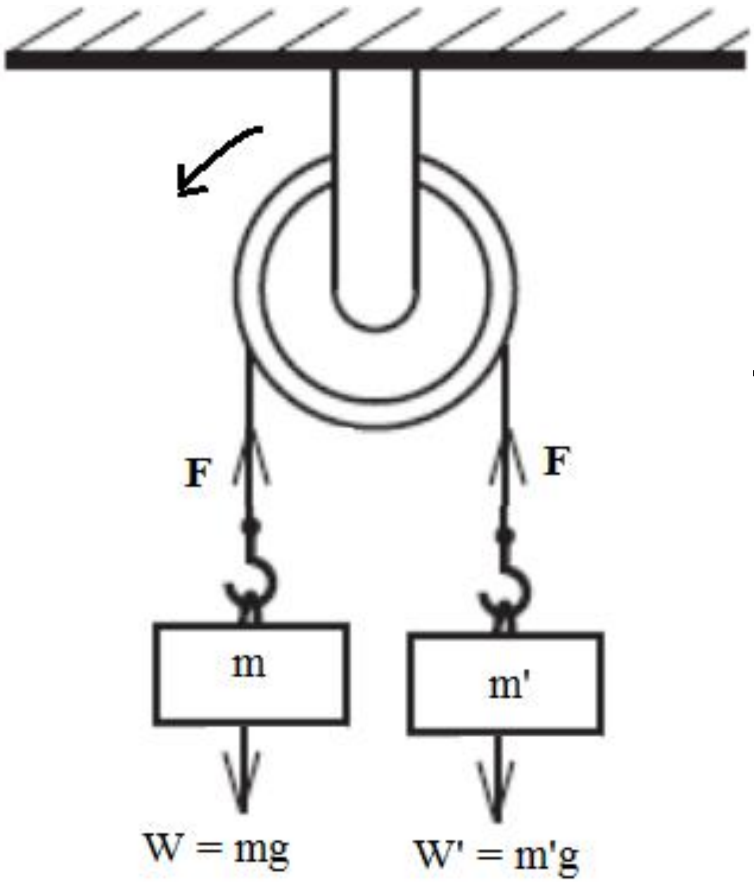
$$T_2 - 2T_1 = 0$$

$$2940\,\mathrm{N} - (150\,\mathrm{kg})a_A - 2(100\,\mathrm{kg})a_A = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_A &= 8.40\,\mathrm{m/s^2} \\ a_B &= \tfrac{1}{2} a_A = 4.20\,\mathrm{m/s^2} \\ T_1 &= (100\,\mathrm{kg})a_A = 840\,\mathrm{N} \\ T_2 &= 2T_1 = 1680\,\mathrm{N} \end{aligned}}$$

Exemplo 3

Determine a aceleração com as quais as massas m e m’ se movem. Admita que a polia possa girar livremente ao redor do eixo e desprezar possíveis efeitos devido à massa da polia.



$$F - mg = ma$$

$$m`g - F = m`a \quad (+)$$

$$(m`-m)g = (m + m`)a$$

$$a = \frac{(m`-m)g}{(m`+m)}$$

Exemplo 4

Uma partícula de massa igual a 10 kg, sujeita a uma força F = (120t + 40) N, move-se em linha reta. No instante t=0 a partícula está em x_0 = 5 m, com velocidade v_0 = 6 m.s^{-1}. Achar sua velocidade e posição em qualquer instante posterior.

$$F = m \cdot a$$

$$120t + 40 = 10 \cdot a$$

$$a = (12t + 4) m \cdot s^{-2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 4$$

Integrando, temos:

$$\int_6^v dv = \int_0^t (12t + 4) dt$$

$$v = (6t^2 + 4t + 6) m \cdot s^{-1}$$

Constante t=0

Exemplo 4

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{integrando, temos}$$

$$\int_5^x dx = \int_0^t v dv = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6) dt$$

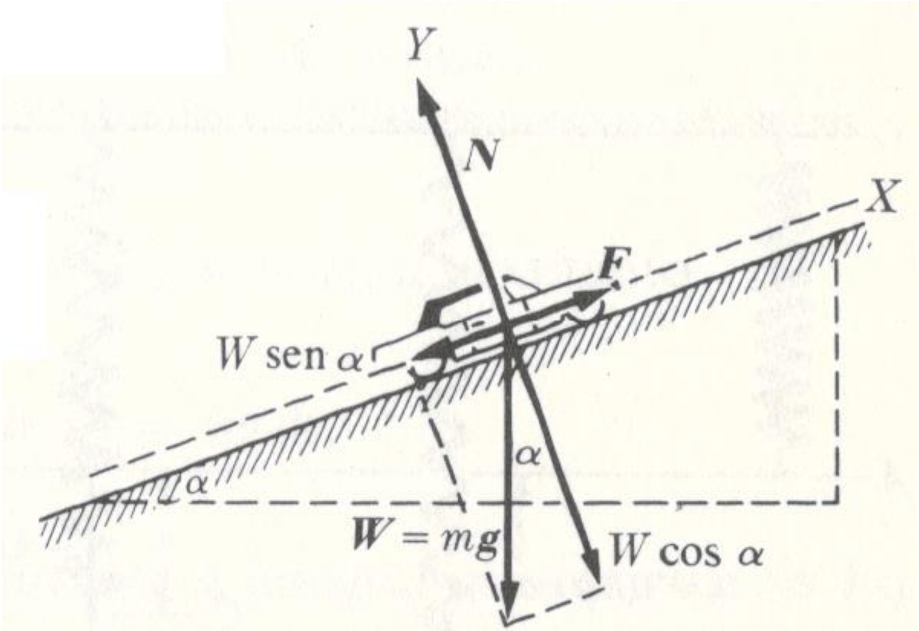
$$x = (2t^3 + 2t^2 + 6t + 5)m,$$

Constante t=0

O que permite determinar a posição em qualquer instante.

Exemplo 5

- Um automóvel de massa igual a 1200 kg sobe uma longa colina, inclinada de 5º, com uma velocidade constante de 36 km/h. Calcule o trabalho que o motor deve realizar em 5 min e a potência desenvolvida por ele. Despreze os efeitos do atrito.



$$F_R = ma$$

$$F - mg\ sen\alpha = ma$$

$$v = cte \Rightarrow a = 0$$

$$F = mg\ sen\alpha = 1200.9.8.sen5^0 = 1,024 \times 10^3\, N$$

Exemplo 5

$$v = 36\,{}^{km}\!/\!_{h} = 10\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

$$\Delta t = 5\min = 300s$$

$$s = v.\Delta t = 10.300 = 3000m = 3\times 10^{3}\,m$$

$$W = Fs = 1{,}024\times 10^{3}.3\times 10^{3} = 3{,}072\times 10^{6}\,j$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{3{,}072\times 10^{6}}{3\times 10^{2}} = 1{,}024\times 10^{4}\,w$$

Exemplo 7

- Uma força F = 6t N age sobre uma partícula cuja massa é 2 kg. Se a partícula parte do repouso, procure o trabalho realizado pela força durante os primeiros 2 s.

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t \;\; m \cdot s^{-2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt$$

$$v = \int_0^t (3t)dt = 1,5t^2 \;\; m \cdot s^{-1}$$

Exemplo 7

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdv$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt \Rightarrow x = \int_0^t (1,5t^2)dt = 0,5t^3 \ m$$

$$t = (\frac{x}{0,5})^{1/3} = 1,26x^{1/3}$$

$$F = 6t = 7,56x^{1/3} \ N$$

$$W = \int_0^x Fdx = \int_0^x (7,56x^{1/3})dx = 5.67x^{4/3}$$

$$t = 2 \ s$$

$$x = 0,5t^3 = 4 \ m$$

$$x = 4 \text{ m}$$

$$W = 5,67x^{4/3} = 5,67(4)^{4/3} = 36J$$

Exemplo 7

Outra solução:

$$x = 0,5t^3 \ m$$

$$dx = 1,5t^2 dt$$

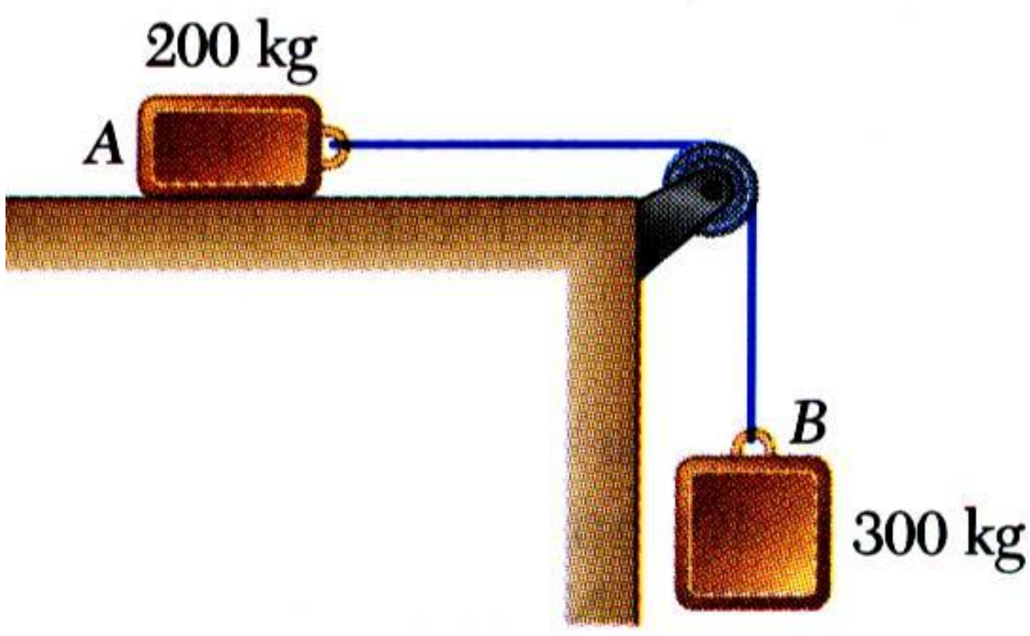
$$F = 6t$$

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx = \int_0^x (6t)(1,5t^2 dt) = 2,25t^4 \ J$$

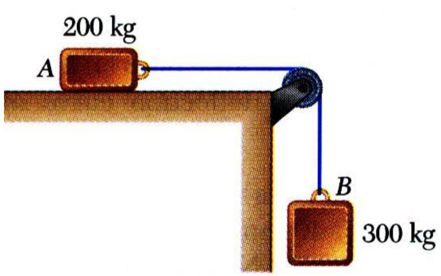
$$t = 2 \ s \Rightarrow W = 2,25(2)^4 = 36 \ J$$

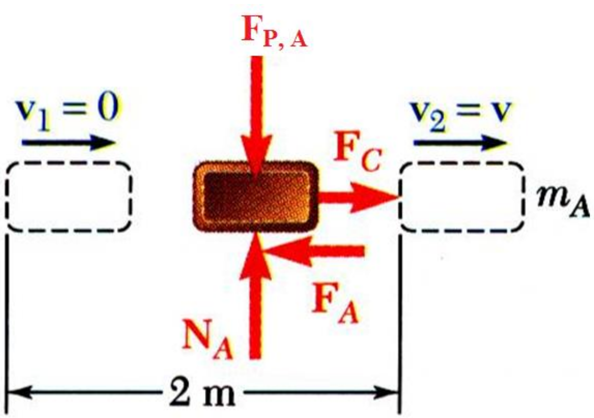
Exemplo 8

Dois blocos estão unidos por um cabo inextensível como mostrado. Se o sistema é solto do repouso, determine a velocidade do bloco A depois de ter movido 2 m. Suponha que o coeficiente de atrito entre o bloco A eo plano é μ = 0,25 e que a polia é sem peso e sem atrito



Exemplo 8





SOLUÇÃO:

- Aplicar o princípio do trabalho e energia separadamente para os blocos A e B.

$$F_{P,A} = (200\,\text{kg})(9.81\,\text{m/s}^2) = 1962\,\text{N}$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k F_{p,A} = 0.25(1962\,\text{N}) = 490\,\text{N}$$

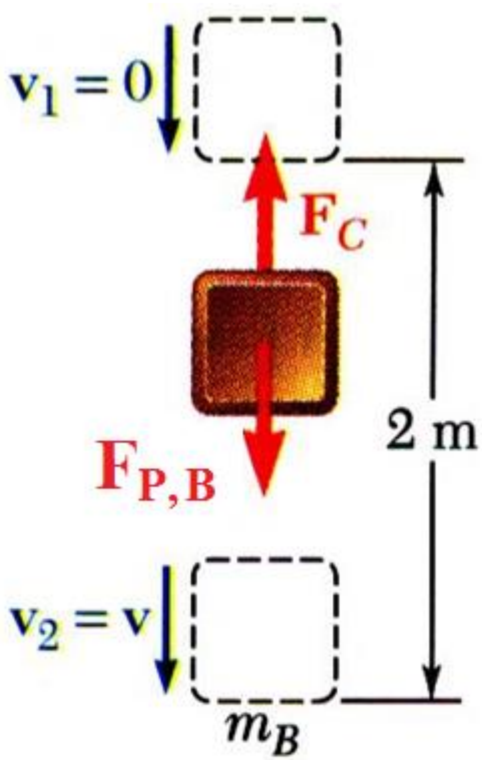
$$T_2 - T_1 = W_{1\to 2}$$

$$T_1 + W_{1\to 2} = T_2$$

$$0 + F_C(2\,\text{m}) - F_A(2\,\text{m}) = \tfrac{1}{2} m_A v^2$$

$$F_C(2\,\text{m}) - (490\,\text{N})(2\,\text{m}) = \tfrac{1}{2}(200\,\text{kg})v^2$$

Exemplo 8



$$F_{P,B} = (300\,\text{kg})(9.81\,\text{m/s}^2) = 2940\,\text{N}$$

$$T_1 - T_2 = W_{1\to 2}$$

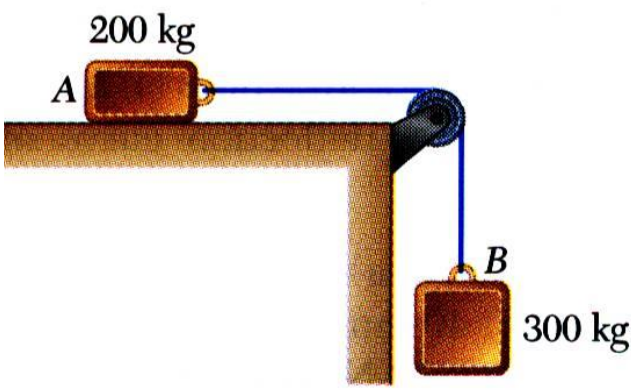
$$T_1 + W_{1\to 2} = T_2 :$$

$$0 - F_c(2\,\text{m}) + F_{P,B}(2\,\text{m}) = \tfrac{1}{2} m_B v^2$$

$$-F_c(2\,\text{m}) + (2940\,\text{N})(2\,\text{m}) = \tfrac{1}{2}(300\,\text{kg})v^2$$

Exemplo 8

- Quando as duas relações são combinadas, o trabalho das forças do cabo cancela. Resolva para a velocidade.



$$F_C(2\,\mathrm{m}) - (490\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = \tfrac{1}{2}(200\,\mathrm{kg})v^2$$

$$-F_c(2\,\mathrm{m}) + (2940\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = \tfrac{1}{2}(300\,\mathrm{kg})v^2$$

$$(2940\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) - (490\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = \tfrac{1}{2}(200\,\mathrm{kg} + 300\,\mathrm{kg})v^2$$

$$4900\,\mathrm{J} = \tfrac{1}{2}(500\,\mathrm{kg})v^2$$

$$\boxed{v = 4.43\,\mathrm{m/s}}$$

Exemplo 9

- Determine a energia potencial associada com as seguintes forças centrais: (a) $F = kr$ (b) $F = k/r^2$. Em ambos os casos, se k for negativo a força será atrativa e se k for positivo a força é repulsiva.

(a)
$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = kr \quad \text{ou} \quad dE_p = -kr\ dr$$

Integrando, obtemos
$$E_p = \int -kr\ dr = -\frac{1}{2}kr^2 + C$$

É habitual fazer-se $E_p = 0$ em $r = 0$, de tal forma que $C = 0$ e

$E_p = -\frac{1}{2}kr^2$. Considerando $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, podemos escrever

$$E_p = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

Exemplo 9

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = k\ x, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = k\ y, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = r\ z$$

Resultado que era esperado, de vez que a força central $F = kx$ na forma vetorial é $\vec{F} = k\ \vec{r} = k\ (\vec{u}_x x + \vec{u}_y y + \vec{u}_z z)$.

(b) $$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{k}{r^2} \quad \text{ou} \quad dE_p = -k\left(\frac{dr}{r^2}\right)$$

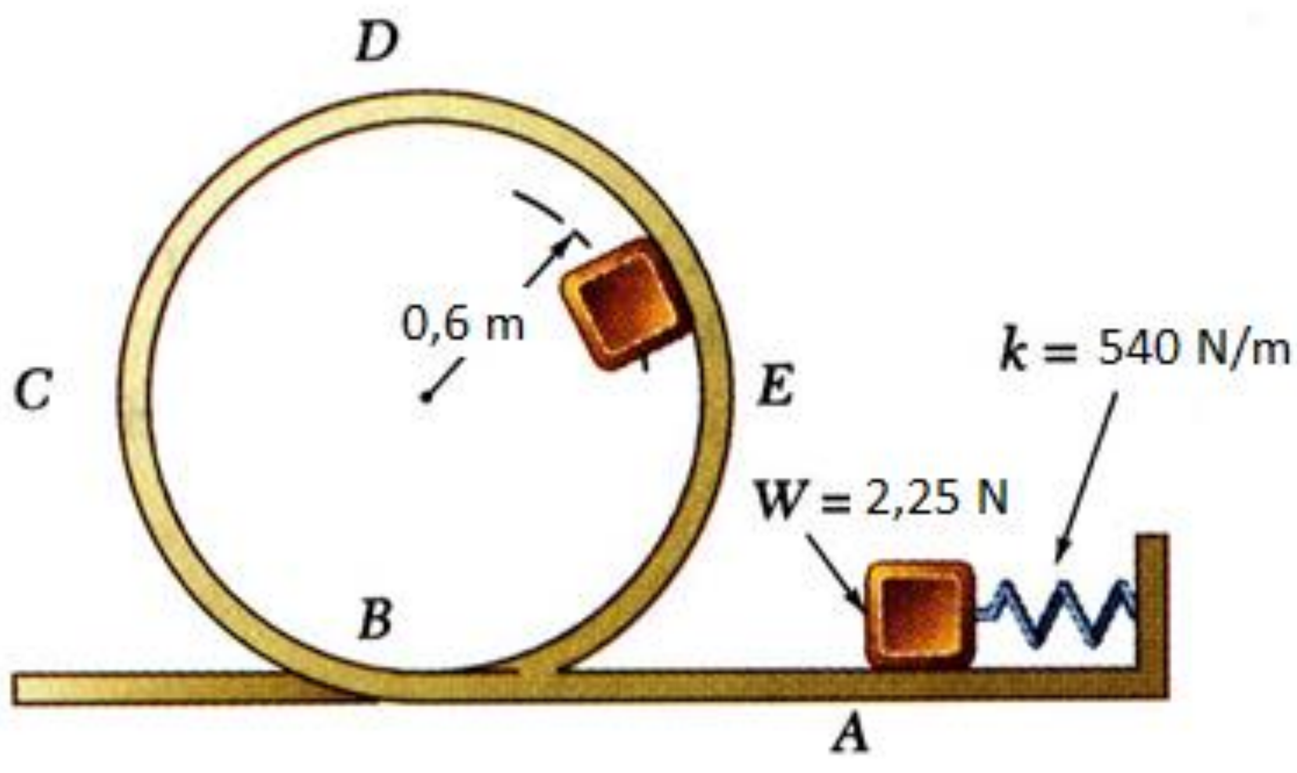
Integrando, obtemos $$E_p = \int -k\ \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C$$

É habitual fazer-se $E_p = 0$ em $r = \infty$, de tal forma que $C = 0$ e

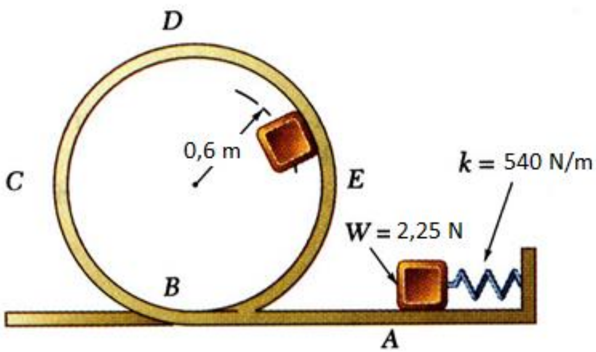
$$E_p = \frac{k}{r}.$$

Exemplo 10

O bloco de 2,25 N é empurrado contra a mola e liberado do repouso em A. Desprezando atrito, determine a menor deflexão da mola para que o bloco dê a volta em torno do faço ABCDE e permaneça o tempo todo em contato com ele.

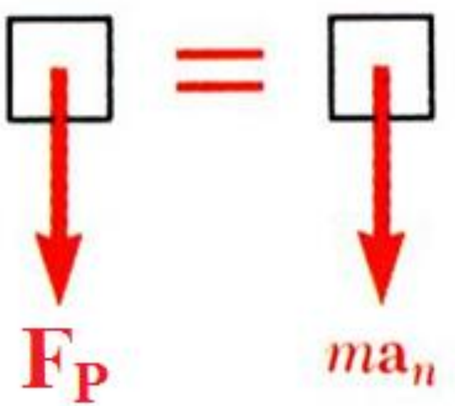


Exemplo 10



SOLUÇÃO:

- Definindo a força exercida pelo loop como zero, para resolver a velocidade mínima em D.

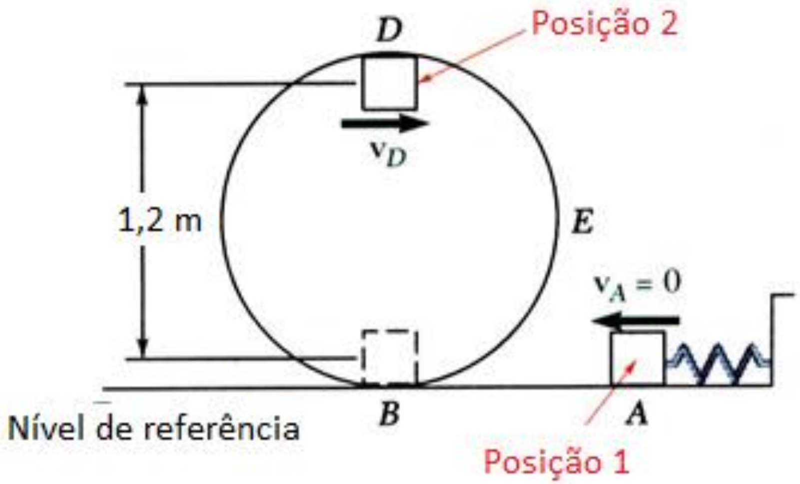


$$+\downarrow \sum F_n = ma_n :$$

$$F_P = ma_n \qquad mg = m v_D^2 / r$$

$$v_D^2 = rg = (0{,}6\ \mathrm{m})(9{,}81\mathrm{m/s}) = 5{,}89\,\mathrm{m^2/s^2}$$

Exemplo 10



- Aplicar o princípio da conservação de energia entre os pontos A e D.

$$U_1 = U_e + U_g = \tfrac{1}{2}kx^2 + 0 = \tfrac{1}{2}\left(540\,\mathrm{N/m}\right)x^2 = 270x^2$$

$$T_1 = 0$$

$$U_2 = U_e + U_g = 0 + F_P y = \left(2,25N\right)\left(1,2m\right) = 2,7J$$

$$U2 = 2,7J$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}\frac{2,25N}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}\left(5,89\,\mathrm{m^2/s^2}\right) = 0,675J$$