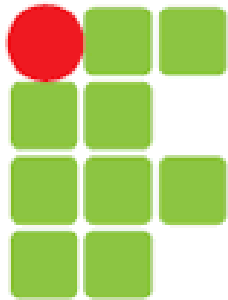


Mecânica Geral Básica



INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE



Dinâmica da Partícula: Leis de Newton.

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Sir Isaac Newton

- ❖ Nascido em 4 de janeiro de 1643, em Woolsthorpe, Lincolnshire, na Inglaterra;
- ❖ 5 de junho de 1661: entrou na Trinity College, em Cambridge;
- ❖ Abril de 1665: Formou-se bacharel;
- ❖ Verão de 1665 até 1667: a universidade foi fechada por causa da peste negra; Newton voltou para casa e fez grandes avanços em Matemática, Física e Astronomia;
- ❖ 1666: Lei da gravitação universal;
- ❖ 1669: Newton é nomeado professor lucasiano em Cambridge;
- ❖ 1670: teoria corpuscular da luz;

Sir Isaac Newton

- ❖ 1671: Publicação do Cálculo (mais tarde independentemente inventado pelo alemão Leibniz);
- ❖ 1687: Publicação de *Principia* (três leis de Newton);
- ❖ 1689: eleito para o parlamento;
- ❖ 1696: nomeado *Warden of the Royal Mint*;
- ❖ 1699: nomeado *Master of the Royal Mint* (ficou muito rico!);
- ❖ 1703: eleito presidente da *Royal Society*;
- ❖ 1705: foi condecorado cavaleiro pela rainha Anne;
- ❖ 31 de março de 1727: morreu em Londres.

Primeira lei de Newton

➤ Lei da Inércia:

- ❑ Uma partícula livre sempre se move com velocidade constante, isto é, sem aceleração.

➤ Referencial Inercial

- ❑ Referencial inercial é um sistema de referência em que corpos livres (sem forças aplicadas) não têm o seu estado de movimento alterado, ou seja: corpos livres não sofrem acelerações quando não há forças sendo exercidas. Tais sistemas ou estão parados (velocidade = 0) ou em movimento retilíneo uniforme uns em relação aos outros.

Primeira lei de Newton

➤ Referencial Inercial

- ❑ Num referencial inercial, se dois corpos estão se movendo com mesma velocidade e no mesmo sentido (o referencial de um dos corpos é inercial em relação ao outro), a velocidade de um em relação ao outro é nula.
- ❑ Um referencial é denominado referencial inercial se nele a primeira lei de Newton é válida.
- ❑ A Terra não é um referencial inercial. A Terra está em movimento de rotação. Mas, para efeito de observações que fazemos sobre as leis de Newton, essa rotação não afeta. Assim sendo, como uma boa aproximação aceitamos um laboratório sobre a Terra como um referencial inercial.

Massa

➤ Massa gravitacional

- ❑ $F_g = mg$ = peso = força gravitacional
- ❑ A massa **m** nesta equação é fonte de interação

➤ Massa inercial

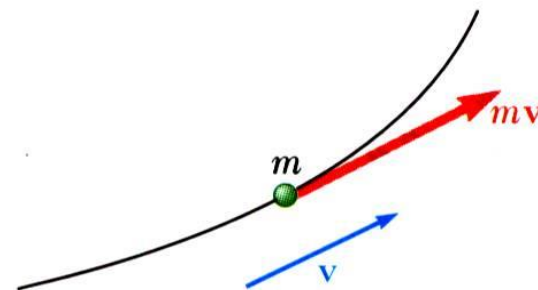
- ❑ = Resistência a mudanças no movimento, na aceleração
- Percepção de Newton: estas duas massas são idênticas
- De onde vem a massa?
 - ❑ Pensamento atual: partícula de Higgs
 - ❑ Ainda não se sabe, uma busca está sendo feita nos maiores aceleradores de partículas do mundo
 - O Grande Colisor de Hádrons (em inglês Large Hadron Collider - LHC) está se preparando para procurar pela Higgs

Quantidade de Movimento Linear de uma Partícula

- A quantidade de movimento de uma partícula é definida como o produto de sua massa por sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- A quantidade de movimento é uma grandeza vetorial e tem a mesma que a velocidade.



- No SI a quantidade de movimento é expressa em

$$\frac{m}{s} kg = kgms^{-1}$$

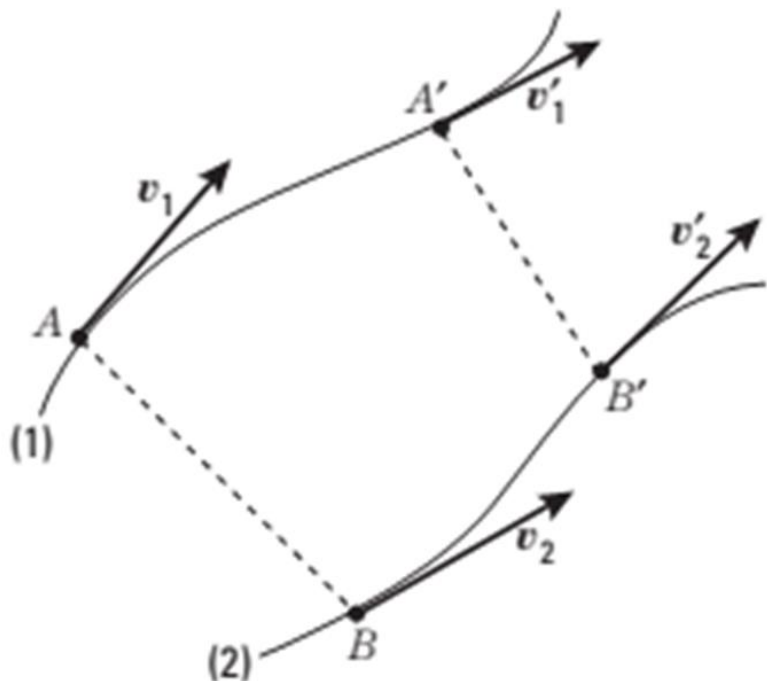
Quantidade de Movimento Linear de uma Partícula

➤ Lei da Inércia:

- ❑ Uma partícula livre move-se com quantidade de movimento constante.
- ❑ Se a força resultante sobre uma partícula é zero, a quantidade de movimento linear da partícula permanece constante em módulo, sentido e direção.

Princípio da conservação da Quantidade de Movimento

- Considerando duas partículas sujeitas somente às suas interações mútuas e isolados do resto do universo.



No instante t :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

No instante t' :

$$\vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

- A quantidade de movimento linear total de um sistema composto de duas partículas sujeitas somente às suas interações mútuas permanece constante..

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

Princípio da conservação da Quantidade de Movimento

- A quantidade de movimento linear total de um sistema isolado de partículas é constante.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots = \text{const.},$$

- Para o caso particular de duas partículas,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.},$$

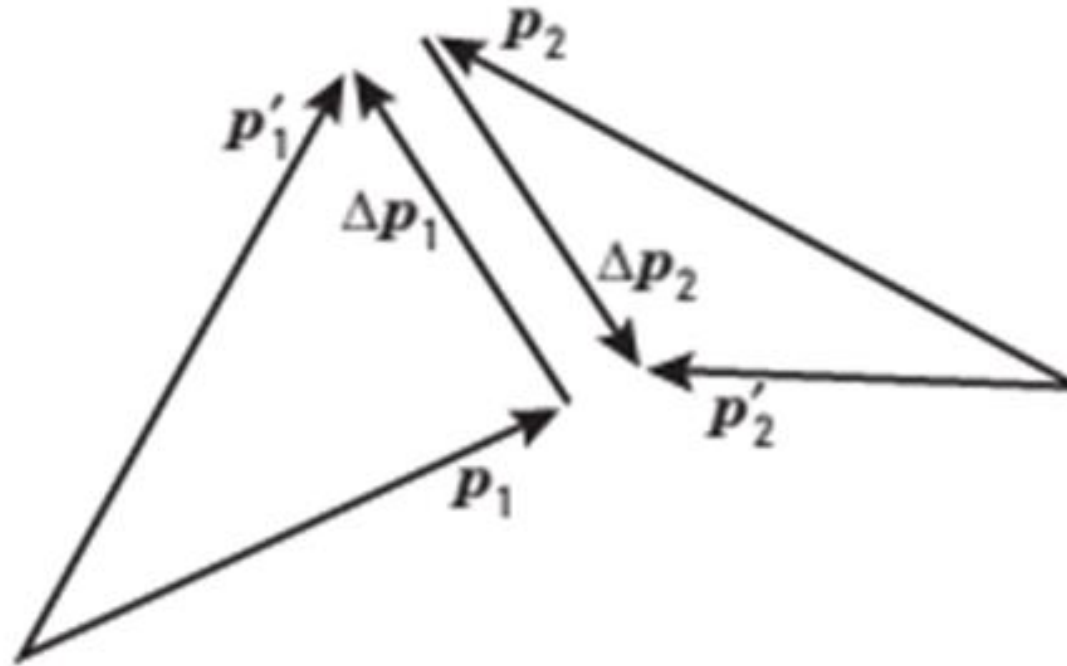
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2.$$

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

$$\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$$

Princípio da conservação da Quantidade de Movimento

- Uma interação acarreta uma troca de quantidade de movimento, de modo que a quantidade de movimento “perdida” por uma das partículas em interação é igual à quantidade de movimento “ganha” pela outra partícula.



$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$$

Princípio da conservação da Quantidade de Movimento

- A Lei da inércia é justamente um caso particular do princípio de conservação da quantidade de movimento. Isso ocorre porque, se tivermos somente uma partícula isolada a equação

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots = \text{const.},$$

terá um único termo, tornando-se assim

$$\vec{p} = \text{const.}, \text{ ou, equivalente, } \vec{v} = \text{const.},$$

o que é a *Lei da Inércia*.

Exemplo 1.

- Uma arma, cuja massa é 0,80 kg, dispara um projétil de massa, de 0,016 kg com velocidade de recuo 700 ms^{-1} . Determine a velocidade de recuo da arma.

Solução: Inicialmente a arma e projétil estão em repouso e a quantidade de movimento total é zero. Após a explosão o projétil move-se para a frente com a quantidade de movimento

$$p_1 = m_1 v_1 = (0,016 \text{ kg}) \times (700 \text{ ms}^{-1}) = 11,20 \text{ kgms}^{-1}$$

A arma deve, então, recuar com uma quantidade de movimento de mesmo módulo e de sentido contrário. Portanto devemos ter também.

$$p_2 = m_2 v_2 = 11,20 \text{ kgms}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{11,20 \text{ kgms}^{-1}}{0,80 \text{ kg}} = 14,0 \text{ ms}^{-1}$$

2º lei de Newton

A equação $\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$ relaciona as variações das quantidades de movimento das partículas 1 e 2 durante o intervalo de tempo $\Delta t = t' - t$. Dividindo-se ambos os membros por Δt , podemos escrever

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

fazendo Δt muito pequeno e calculando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

onde

$$F = -\frac{d\vec{p}}{dt}$$

3º lei de Newton

$$\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2 \quad \rightarrow \quad F = -\frac{d\vec{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo, e de sentido contrário, à força sobre a outra.

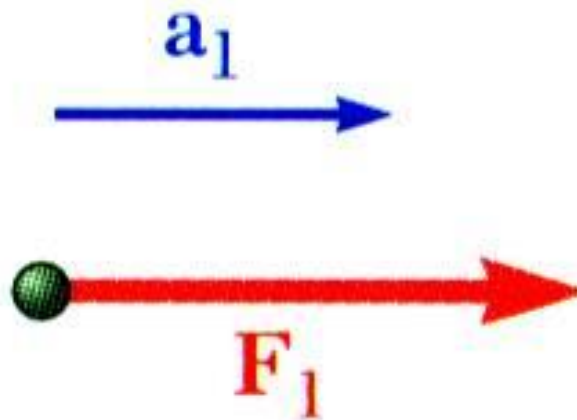
- forças que dois objetos em interação exercem entre si são sempre exatamente iguais em módulo e com sentidos opostos.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

2º lei de Newton

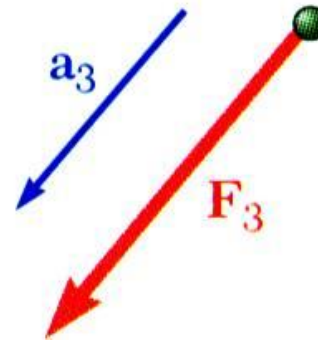
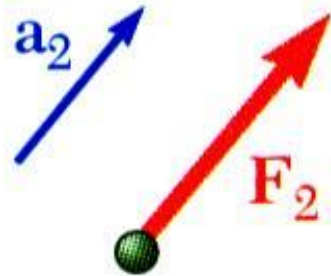
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- Segunda Lei de Newton: Se a força resultante agindo sobre uma partícula não é zero, a partícula terá uma aceleração proporcional ao módulo da resultante e na direção e sentido dela.



2º lei de Newton

- Considere uma partícula sujeita às forças constantes a seguir:

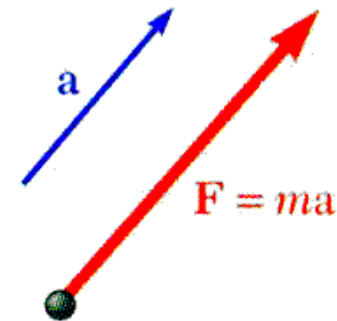


$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{constante} = \text{massa}, m$$

2º lei de Newton

- Quando uma partícula de massa m sofre a ação de uma força $\mathbf{F}$, a aceleração da partícula deve satisfazer a seguinte relação:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$



- A aceleração deve ser avaliada com relação a um sistema de referência newtoniano, ou seja, usando uma referencia que não esteja em aceleração ou rotação.
- Se a força que atua sobre a partícula é zero, esta não acelera, ou seja, permanece estacionária ou continua em uma linha reta com velocidade constante.

Equações de Movimento

- Da segunda lei de Newton



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Para resolver problemas que envolvem o movimento da partícula é mais conveniente substituir a equação acima pelas equações equivalentes escalares :

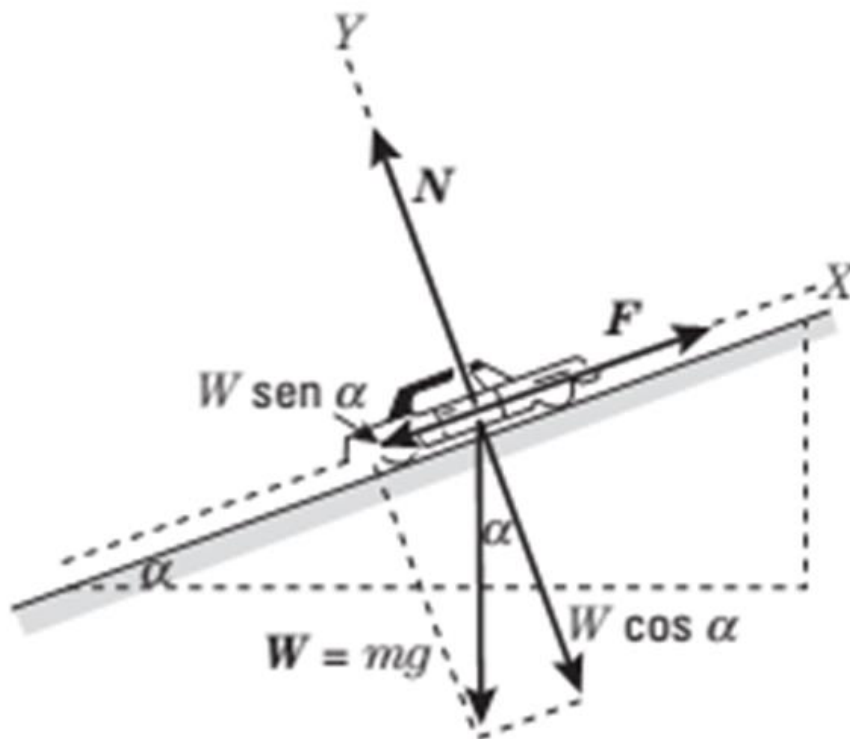
$$\sum (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$$

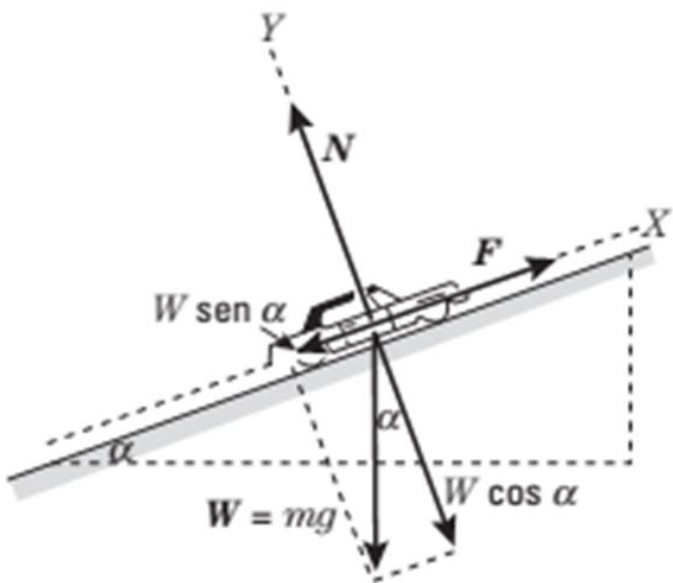
$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \sum F_y = m\ddot{y} \quad \sum F_z = m\ddot{z}$$

Exemplo 2

Um automóvel cuja massa é 1 000 kg sobe uma avenida com 20° de inclinação. Determine a força que o motor deve exercer para que o carro se mova para cima (a) com movimento uniforme, (b) com aceleração de $0,2 \text{ ms}^{-2}$. Determine também, para cada caso, a força que a pista exerce no automóvel.



Exemplo 2



A força normal em ambos os casos é a mesma e vale:

$$N = W \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

$$N = 1000 \times 9,8 \times \cos 20^\circ = \mathbf{9209 \text{ N}}$$

$$F - mg \sin 20^\circ = ma \rightarrow F - 1000 \times 9,8 \times 0,34 = 1000a$$

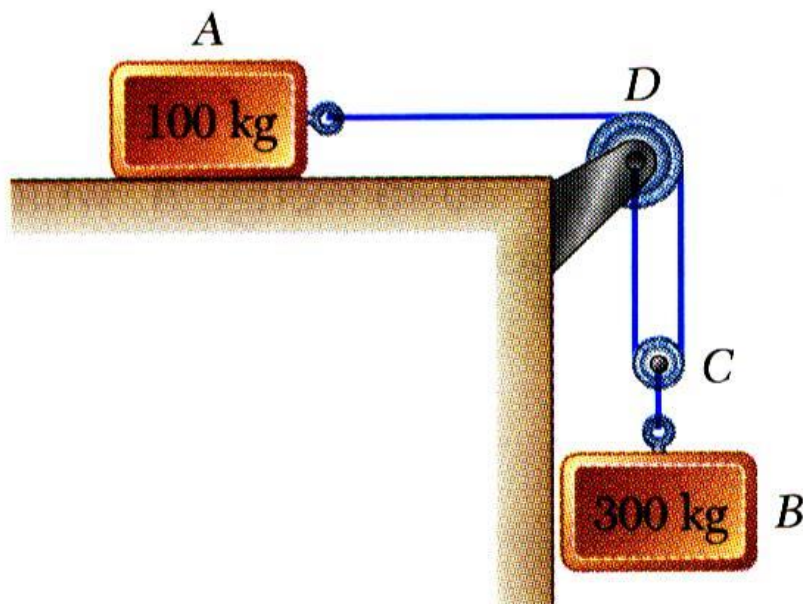
$$F - 3352 = 1000a$$

a) $\text{como } a = 0 \rightarrow F - 3352 = 1000 \times 0 \rightarrow F = 3352 \text{ N}$

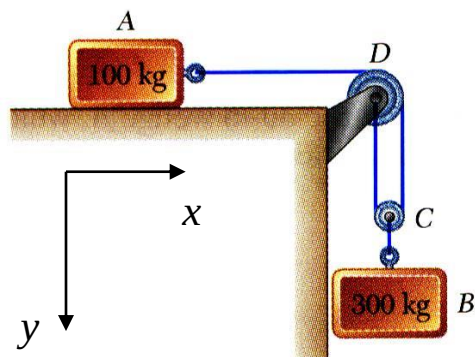
b) $\text{como } a = 0,2 \text{ ms}^{-2} \rightarrow F - 3352 = 1000 \times 0,2 \rightarrow F = 3552 \text{ N}$

Exemplo 3

Os dois blocos mostrados partem do repouso. Não há atrito entre o plano horizontal e a polia e presume-se que a polia tenha massa desprezível. Determine a aceleração de cada bloco e a tensão em cada corda.



Exemplo 3

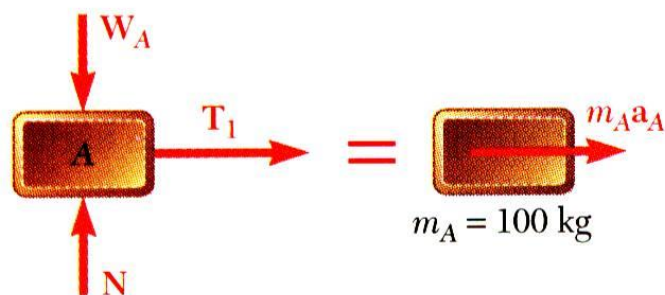


SOLUÇÃO:

- Escreva as relações cinemáticas para os movimentos dependentes e acelerações dos blocos.

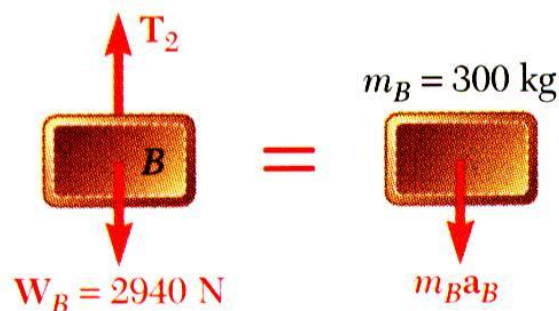
$$y_B = \frac{1}{2} x_A \quad a_B = \frac{1}{2} a_A$$

- Escreva as equações de movimento para blocos e polias.



$$\sum F_x = m_A a_A :$$

$$T_1 = (100 \text{ kg}) a_A$$



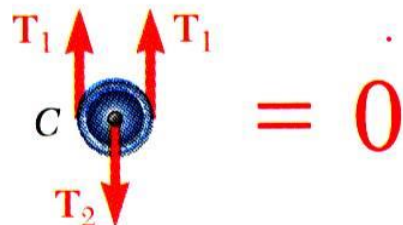
$$\sum F_y = m_B a_B :$$

$$m_B g - T_2 = m_B a_B$$

$$(300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) - T_2 = (300 \text{ kg}) a_B$$

$$T_2 = 2940 \text{ N} - (300 \text{ kg}) a_B$$

Exemplo 3



$$\sum F_y = m_C a_C = 0:$$

$$T_2 - 2T_1 = 0$$

- Combine as relações cinemáticas com as equações de movimento para encontrar as acelerações e a tensão em cada corda.

$$y_B = \frac{1}{2} x_A \quad a_B = \frac{1}{2} a_A$$

$$T_1 = (100 \text{ kg}) a_A$$

$$\begin{aligned} T_2 &= 2940 \text{ N} - (300 \text{ kg}) a_B \\ &= 2940 \text{ N} - (300 \text{ kg}) \left(\frac{1}{2} a_A \right) \end{aligned}$$

$$T_2 - 2T_1 = 0$$

$$2940 \text{ N} - (150 \text{ kg}) a_A - 2(100 \text{ kg}) a_A = 0$$

$$a_A = 8.40 \text{ m/s}^2$$

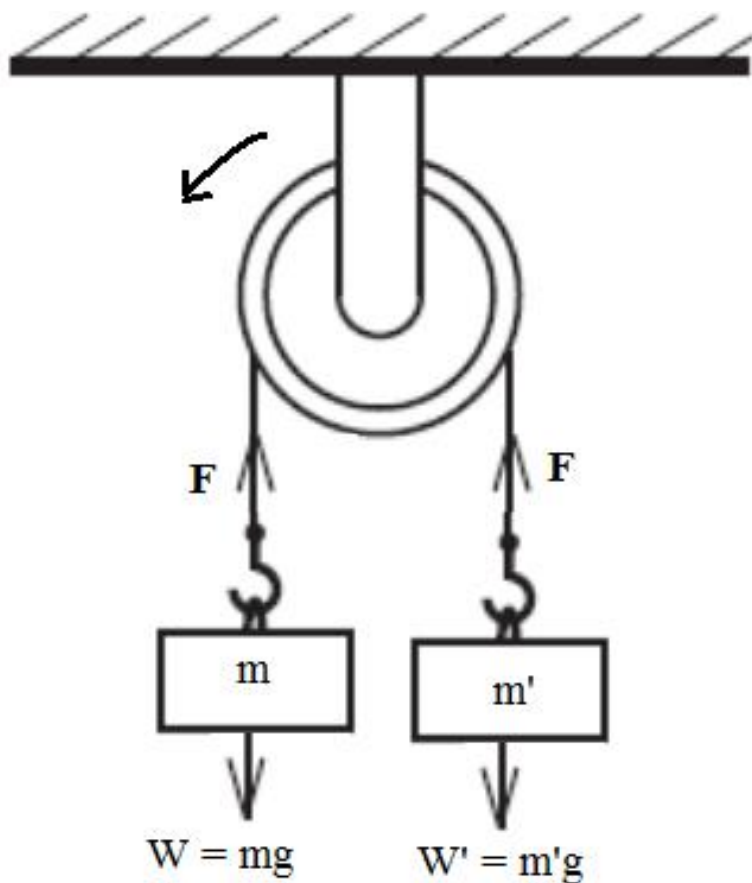
$$a_B = \frac{1}{2} a_A = 4.20 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = (100 \text{ kg}) a_A = 840 \text{ N}$$

$$T_2 = 2T_1 = 1680 \text{ N}$$

Exemplo 4

Determine a aceleração com as quais as massas m e m' se movem. Admita que a polia possa girar livremente ao redor do eixo e desprezar possíveis efeitos devido à massa da polia.



$$F - mg = ma \quad (+)$$

$$m'g - F = m'a$$

$$(m' - m)g = (m + m')a$$

$$a = \frac{(m' - m)g}{(m' + m)}$$

Exemplo 5

Uma partícula de massa igual a 10 kg, sujeita a uma força $F = (120t + 40)$ N, move-se em linha reta. No instante $t=0$ a partícula está em $x_0 = 5$ m, com velocidade $v_0 = 6$ m.s⁻¹. Achar sua velocidade e posição em qualquer instante posterior.

$$F = m \cdot a$$

$$120t + 40 = 10 \cdot a$$

$$a = (12t + 4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 4$$

Integrando, temos:

$$\int_6^v dv = \int_0^t (12t + 4) dt$$

$$v = (6t^2 + 4t + 6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

↓
Constante $t=0$

Exemplo 5

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ integrando, temos}$$

$$\int_5^x dx = \int_0^t v dv = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6) dt$$

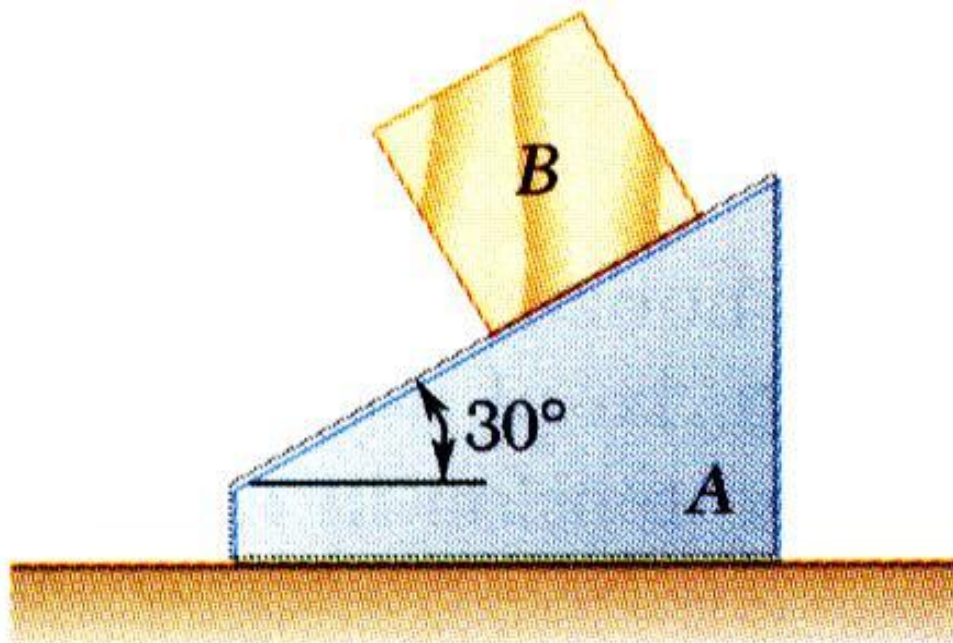
$$x = (2t^3 + 2t^2 + 6t + 5)m,$$

↓
Constante t=0

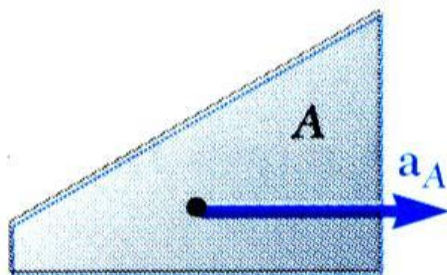
O que permite determinar a posição em qualquer instante.

Exemplo 6

O bloco 54 N parte do repouso e desliza sobre a cunha A de peso 135 N, que é apoiada por uma superfície horizontal. Desprezando o atrito, determine (a) a aceleração da cunha, e (b) a aceleração do bloco em relação à cunha.



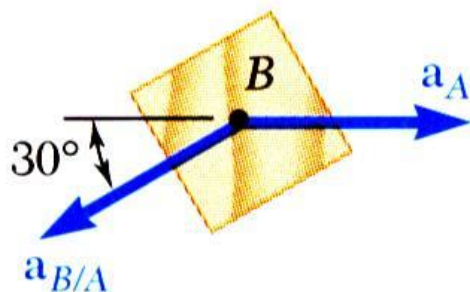
Exemplo 6



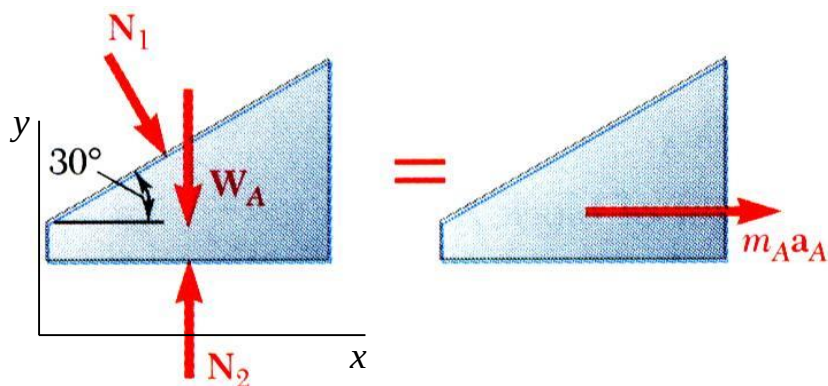
SOLUÇÃO:

- O bloco é restrito a escorregar da cunha. Portanto, seus movimentos são dependentes.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$



- Escrever equações de movimento para cunha e bloco.

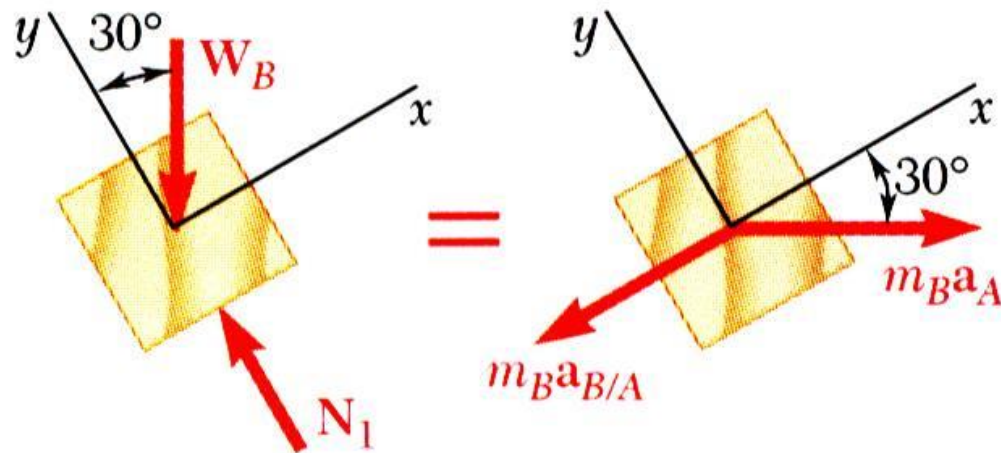


$$\sum F_x = m_A a_A :$$

$$N_1 \sin 30^\circ = m_A a_A$$

$$0.5 N_1 = (W_A / g) a_A$$

Exemplo 6



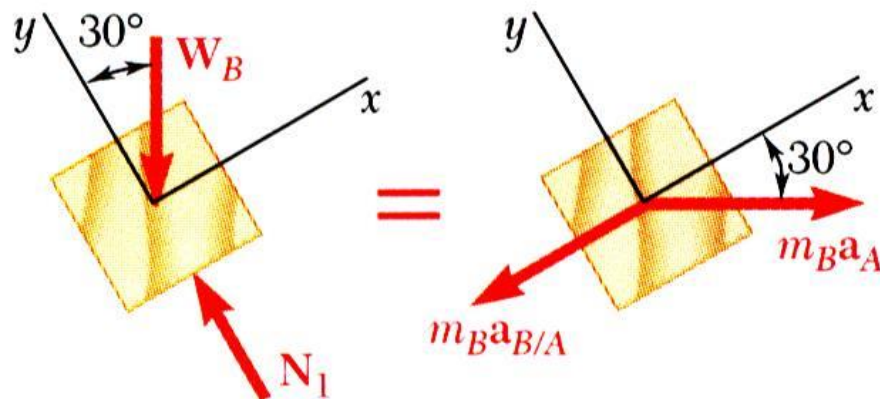
$$\sum F_x = m_B a_x = m_B (a_A \cos 30^\circ - a_{B/A}):$$

$$-W_B \sin 30^\circ = (m_B) (a_A \cos 30^\circ - a_{B/A})$$

$$-m_B g \sin 30^\circ = (m_B) (a_A \cos 30^\circ - a_{B/A})$$

$$a_{B/A} = a_A \cos 30^\circ + g \sin 30^\circ$$

Exemplo 6

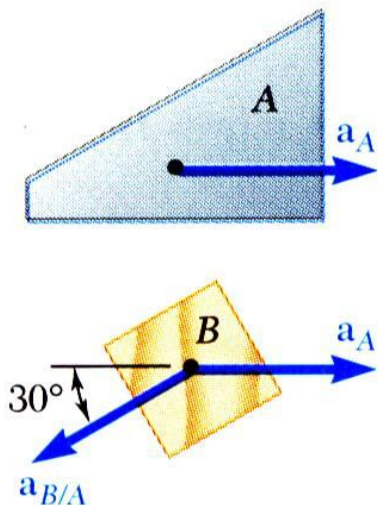


$$\sum F_y = m_B a_y = m_B (-a_A \sin 30^\circ):$$

$$N_1 - W_B \cos 30^\circ = -(W_B / g) a_A \sin 30^\circ$$

Exemplo 6

- Resolva para as acelerações.



$$0.5N_1 = (W_A/g)a_A$$

$$N_1 - W_B \cos 30^\circ = -(W_B/g)a_A \sin 30^\circ$$

$$2(W_A/g)a_A - W_B \cos 30^\circ = -(W_B/g)a_A \sin 30^\circ$$

$$a_A = \frac{gW_B \cos 30^\circ}{2W_A + W_B \sin 30^\circ}$$

$$a_A = \frac{(9,81\text{m/s}^2)(54\text{N})\cos 30^\circ}{2(135\text{N}) + (54\text{N})\sin 30^\circ}$$

$$a_A = 1,54\text{m/s}^2$$

$$a_{B/A} = a_A \cos 30^\circ + g \sin 30^\circ$$

$$a_{B/A} = (1,54\text{m/s}^2)\cos 30^\circ + (9,81\text{m/s}^2)\sin 30^\circ$$

$$a_{B/A} = 6,24\text{m/s}^2$$

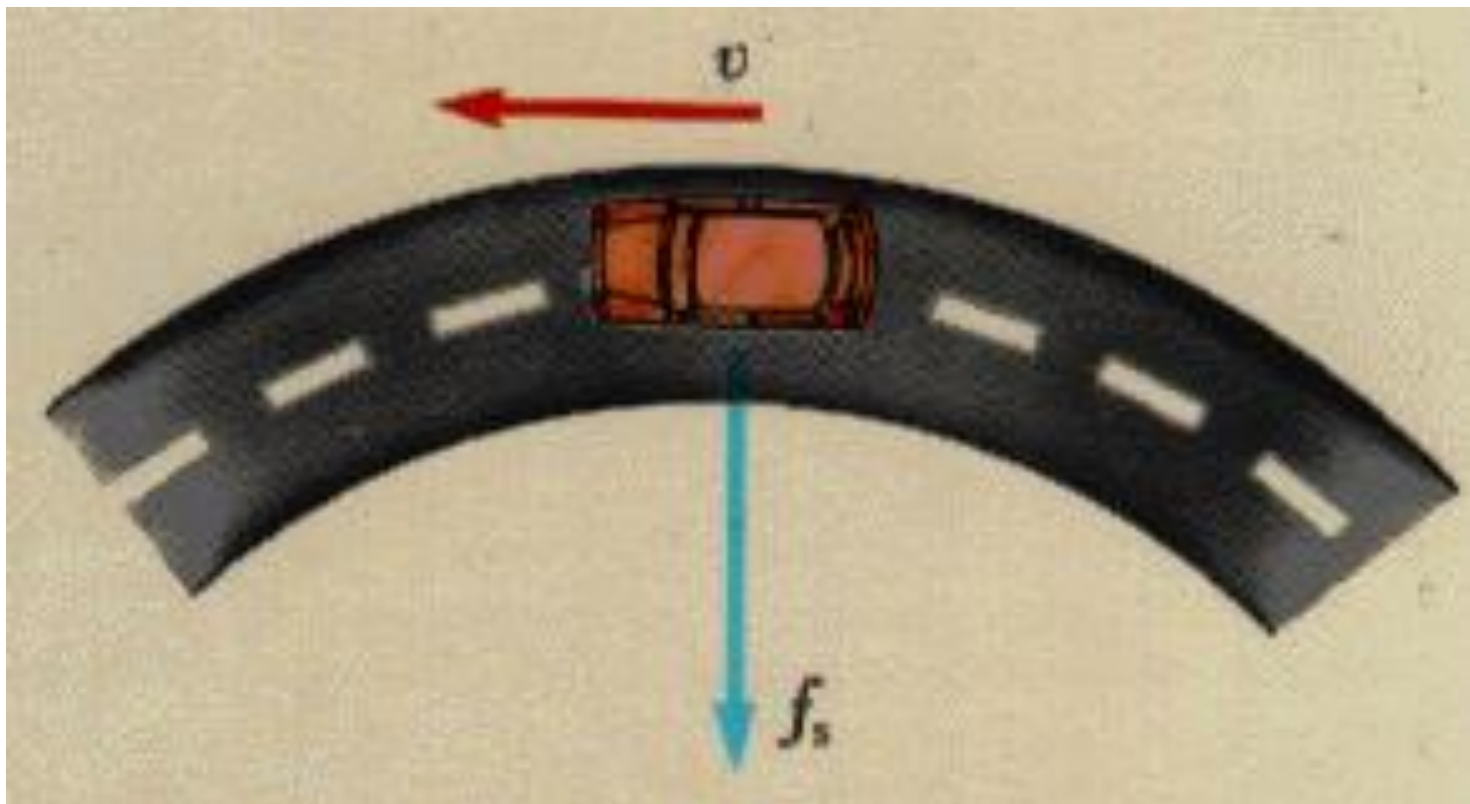
Forças de Atrito

➤ Atrito útil



Forças de Atrito

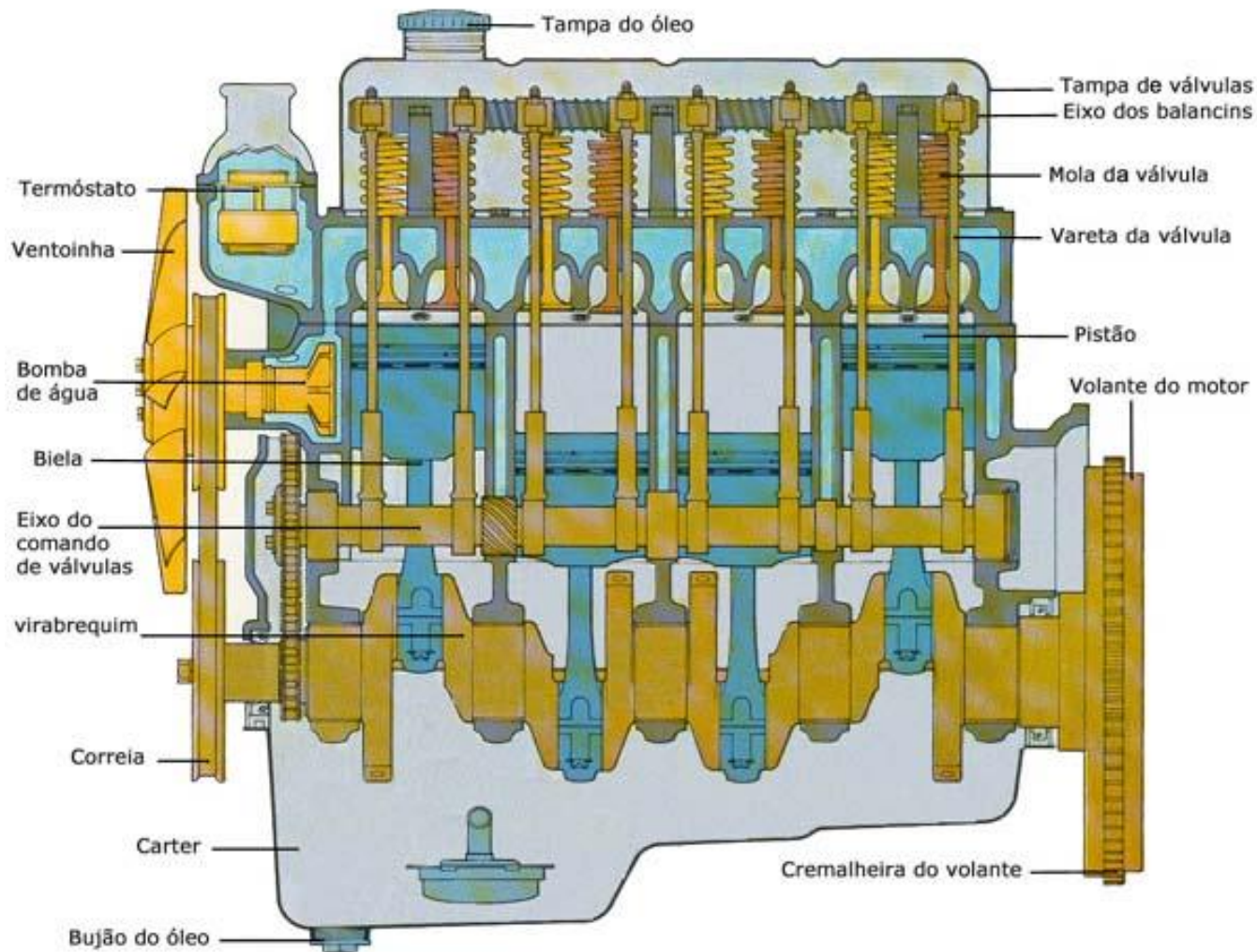
➤ Atrito útil



Forças de Atrito

➤ Atrito indesejável Desgaste em motores

CORTE LONGITUDINAL DE UM MOTOR DE 4 CILINDROS

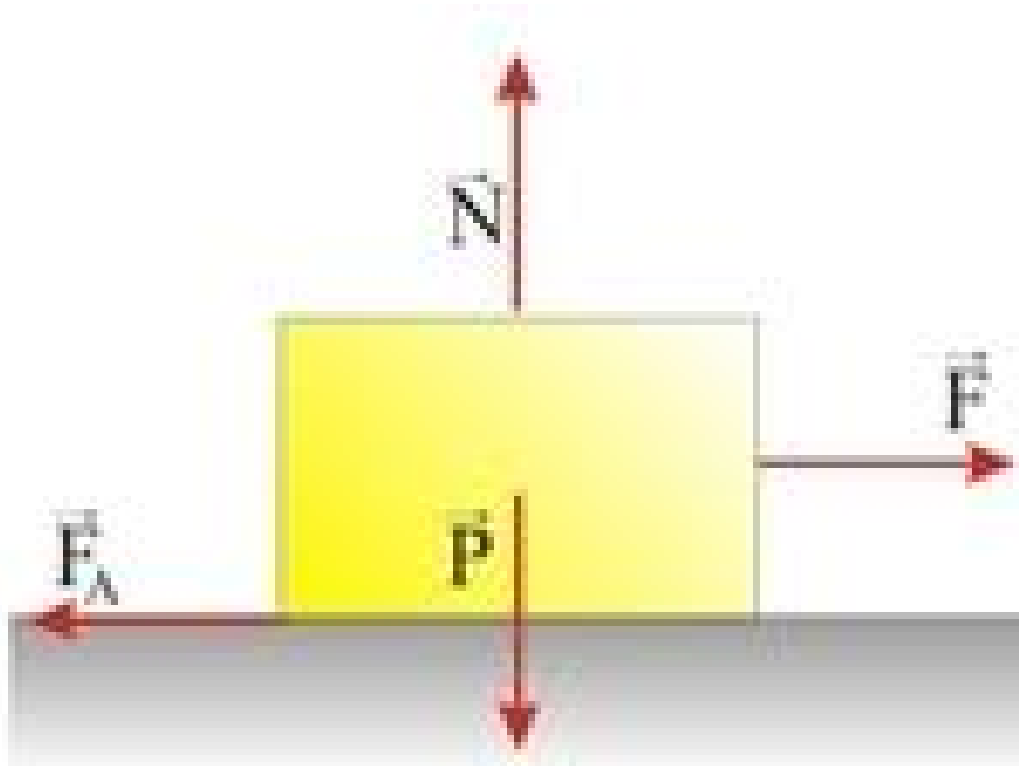


Diferentes formas de atrito

- Atrito estático f_e
- Atrito cinético (deslizamento) f_c
- Atrito de rolamento
- Atrito em fluidos (forças de arraste)

Atrito Estático

- Superfícies em repouso relativo



Leis Empíricas

➤ Força de atrito estático máxima:

□ Proporcional à força normal entre as superfícies

$$f_{e,\max} = \mu_e N \quad \mu_e \text{ coeficiente de atrito estático}$$

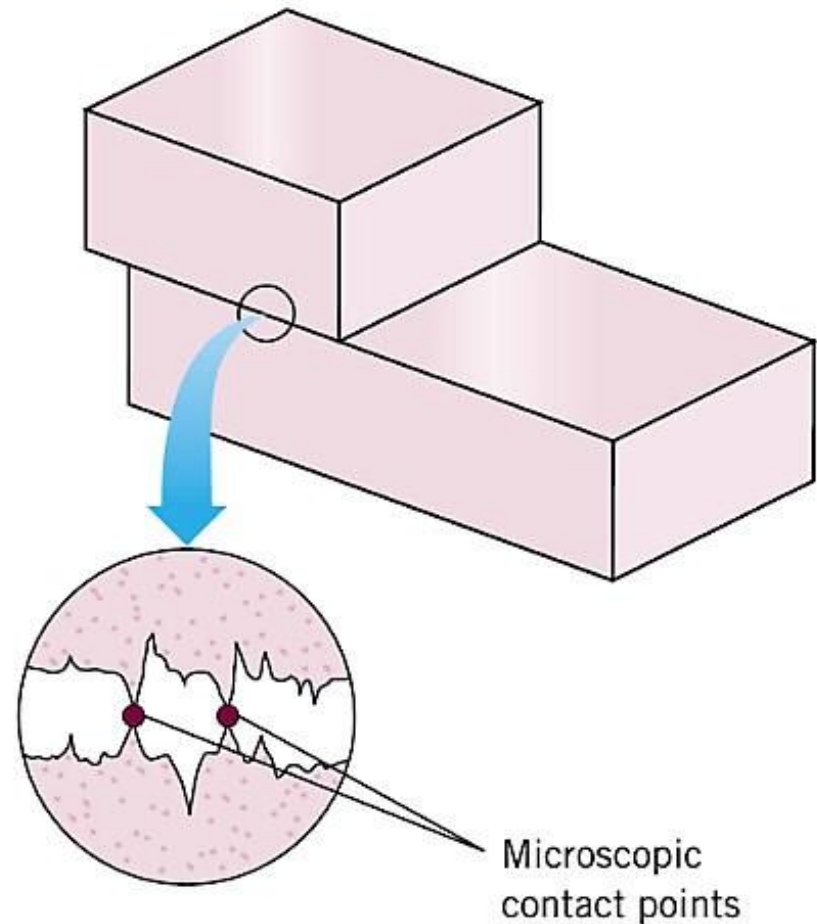
□ μ_e depende da natureza e condições das superfícies em contato

Força de Atrito Estático Máxima

- Independe da área de contato:

Modelo microscópico
para a origem do atrito
estático

(área “efetiva” de contato é
muito menor do que a área
“aparente” de contato)



Copyright John Wiley & Sons

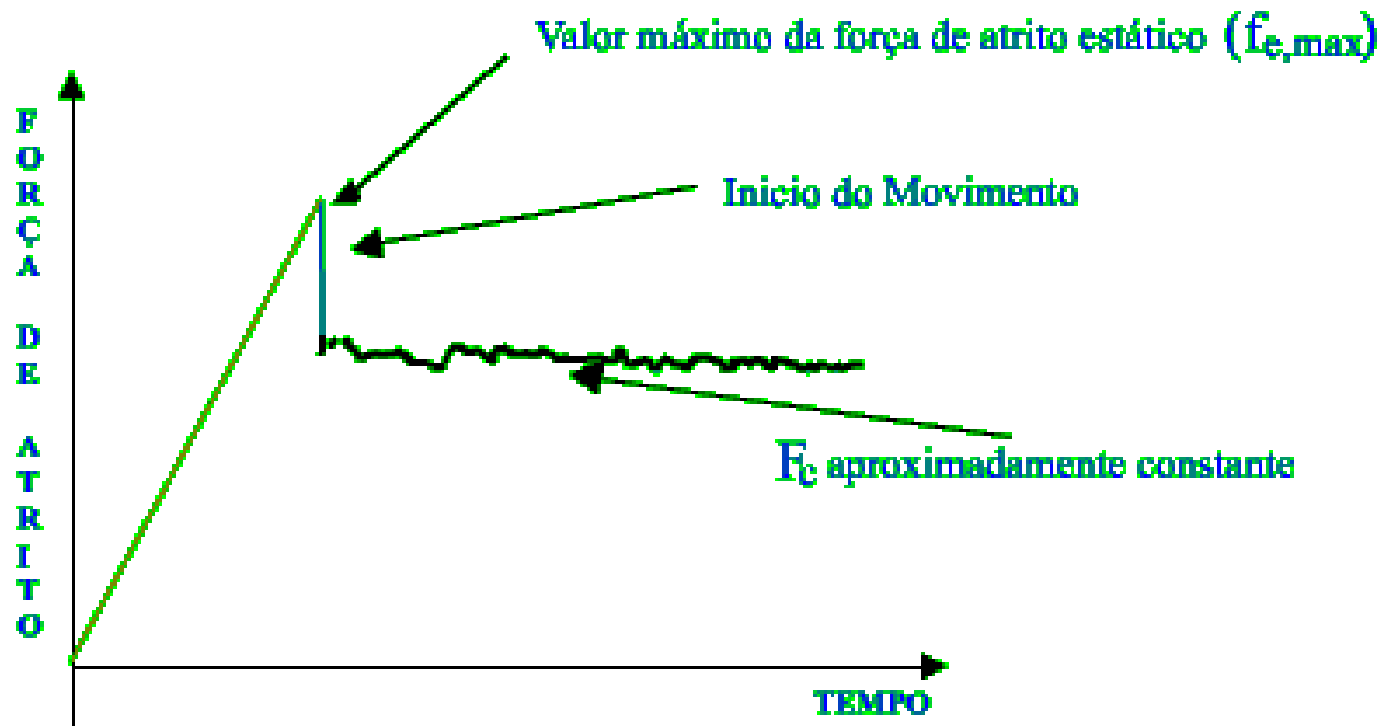
Atrito Cinético

- Movimento relativo entre as superfícies - (deslizamento)
- LEIS EMPÍRICAS aproximadas
 - ❑ $f_c = \mu_c N$ μ_c coeficiente de atrito cinético
 - ❑ μ_c é constante para velocidades não muito grandes
 - ❑ μ_c independe da área macroscópica (“aparente”) de contato
 - ❑ μ_c depende da natureza e condições das superfícies

Atrito Cinético

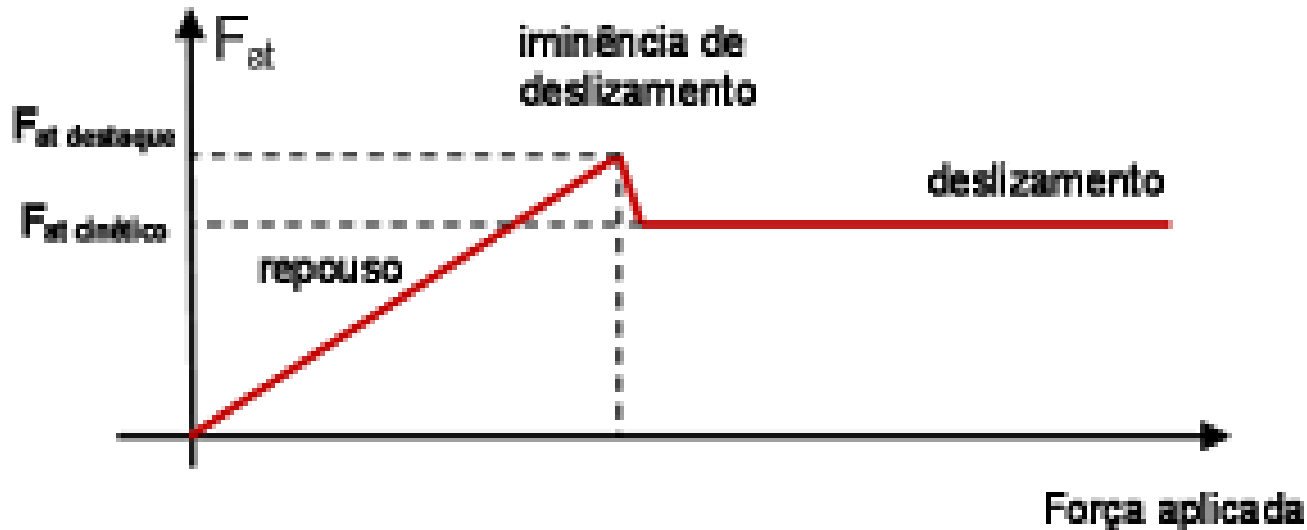
- $\mu_c < \mu_e$
- Comportamento da força de atrito para um corpo tirado do repouso e colocado em movimento

Comportamento da força de atrito



Atrito Cinético

- $\mu_c < \mu_e$
- Comportamento da força de atrito para um corpo tirado do repouso e colocado em movimento



Coeficientes de Atrito

Materiais	μ_e	μ_c
madeira/madeira	0,4	0,2
gelo/gelo	0,1	0,03
metal/metal (c/ lubrif.)	0,15	0,07
aço/aço (s/ lubrif.)	0,7	0,6
borracha/cimento seco	1,0	0,8
articulações nos membros humanos	0,01	0,01

Teflon sobre aço	0,04	0,04
Cobre sobre ferro fundido	1,1	0,3
Esqui encerrado sobre neve	0,1	0,05

Atrito em Fluidos

- Quando um corpo se move através de um fluido, com velocidade relativamente baixa, pode-se supor que a força de atrito seja aproximadamente proporcional a velocidade e atuando em sentido contrário ao da velocidade. Podemos escrever:

$$F_f = \text{atrito do fluido} = -k\eta v$$

k = coeficiente que depende da forma do corpo.

Para um corpo de forma de uma esfera de raio R ,

$$k = 6\pi R$$

η = coeficiente de viscosidade

Exemplo 7

Achar a velocidade-limite de uma gota de chuva. Admitir um diâmetro de 10^{-3} m. A densidade do ar relativa a água é $1,30 \times 10^{-3}$ e $\eta = 1,81 \times 10^{-5}$ N.s.m⁻²

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$W - E - F_f = ma \Rightarrow \text{como } a=0$$

$$mg - m_f g = k\eta v$$

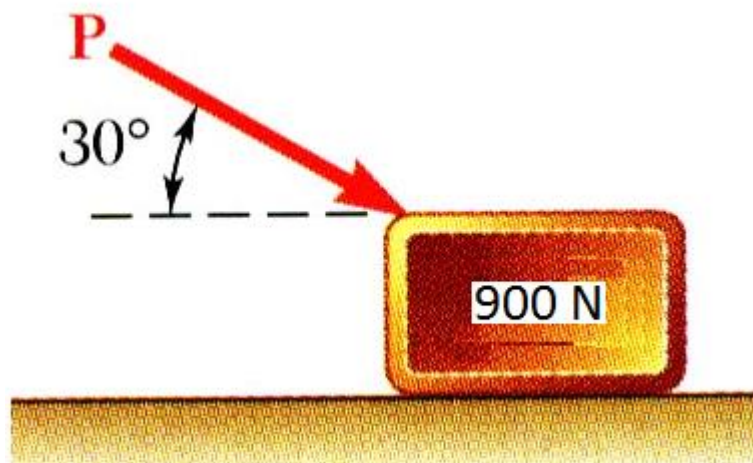
$$(m - m_f)g = k\eta v \Rightarrow v = \frac{(m - m_f)g}{k\eta} = \frac{(m - m_f)g}{6\pi r\eta}$$

$$v = \frac{(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f)g}{6\pi r\eta} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_f)}{6\pi r\eta} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_f)r^2 g}{\eta}$$

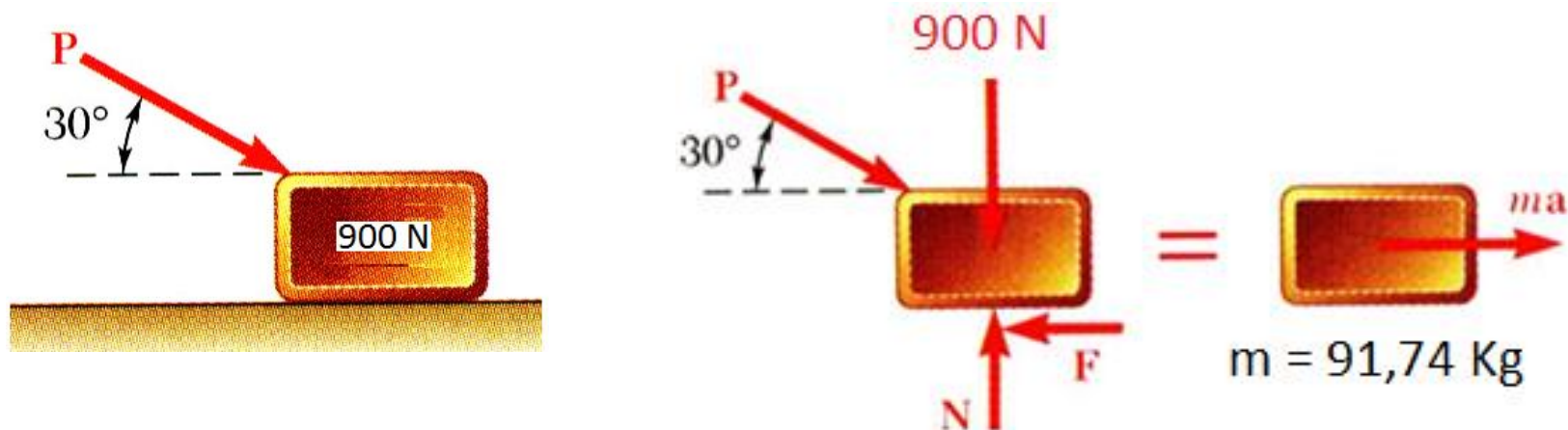
$$v = 30 \text{ ms}^{-1}$$

Exemplo 8

Um bloco de 900 N repousa sobre um plano horizontal. Encontre o módulo da força P necessária para dar ao bloco uma aceleração de 3 m/s^2 para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu = 0,25$.



Exemplo 8



$$m = \frac{W}{g} = \frac{900\text{ N}}{9,81\text{ m/s}^2} = 91,74\text{ Kg}$$

$$F = \mu_k N = 0.25N$$

Exemplo 8

Resolver a equação de movimento para o bloco em duas equações componentes retangulares.

$$\sum F_x = ma : \quad P \cos 30^\circ - 0.25N = (91,74Kg)(3m/s^2) \\ = 275,22N$$

$$\sum F_y = 0 : \quad N - P \sin 30^\circ - 900N = 0$$

As incógnitas consistem da força aplicada P e a reação normal N do plano. As duas equações podem ser resolvidas para essas incógnitas.

$$N = P \sin 30^\circ + 900N$$

$$P \cos 30^\circ - 0.25(P \sin 30^\circ + 900N) = 275,22N$$

$$P = 676N$$

Força de atrito em fluidos (ou força de arraste)

- A força de arraste num fluido, ao contrário do que acontece com a força de atrito, é uma força dependente da velocidade.
- A força de arraste num fluido apresenta dois regimes:

- Para pequenas velocidades $\vec{F} = -b\vec{v}$

onde b é o coeficiente da força de atrito e $\vec{v}$ é a velocidade do corpo

b depende da massa e da forma do objeto

Força de atrito em fluidos (ou força de arraste)

- A força resultante que atua sobre um corpo que cai perto da superfície terrestre, considerando o atrito com o ar é

$$\vec{f} = m\vec{g} - b\vec{v}$$



- Por causa da aceleração da gravidade, a velocidade aumenta.
- A velocidade para a qual a força total $\vec{f}$ é nula chama-se velocidade limite

$$0 = mg - bv_L \Rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$$

- O movimento torna-se retilíneo e uniforme (velocidade constante)

Força de atrito em fluidos (ou força de arraste)

- Para velocidades altas

$$F = \frac{1}{2} \rho A C v^2 \rightarrow \text{Fluxo turbulento}$$

C : coeficiente de arraste (adimensional)

A : área da seção transversal do corpo

ρ : densidade do meio

Força de atrito em fluidos (ou força de arraste)

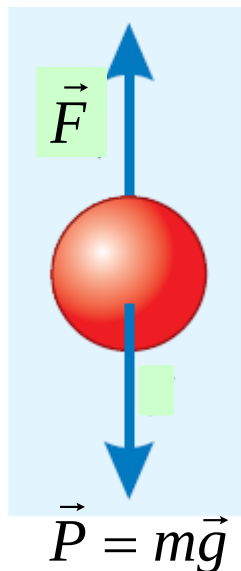


$$0 = mg - F$$

$$mg = \frac{1}{2} \rho A C v_L^2$$

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC}}$$

Gota de chuva



➤ GOTA DE CHUVA

Quando andamos sob a chuva, as gotas que caem não nos machucam. Isso ocorre porque as gotas de água não estão em queda livre, mas sujeitas a um movimento no qual a resistência do ar tem que ser considerada

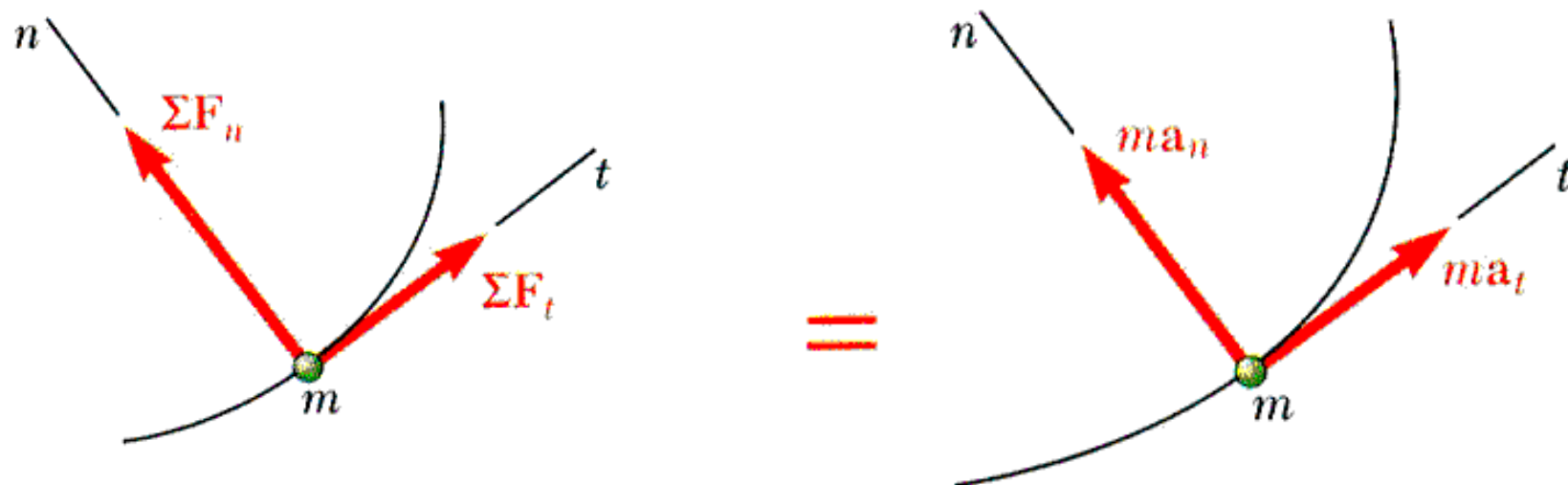
$$\vec{f} = m\vec{g} - F_f$$

➤ Velocidade limite de uma gota de chuva

Com a resistência do ar: $v \approx 27 \text{ km/h}$

Sem a resistência do ar: $v \approx 550 \text{ km/h}$

Movimento Curvilíneo



➤ Para componentes transversais e radiais,

$$\sum F_t = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$\sum F_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$\sum F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

ρ = raio de curvatura da trajetória

Movimento Curvilíneo

➤ No caso do MCU $\rho = R \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow F_N = m\omega^2 R$

➤ Na forma vetorial: $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (m\vec{v})$$

$$\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

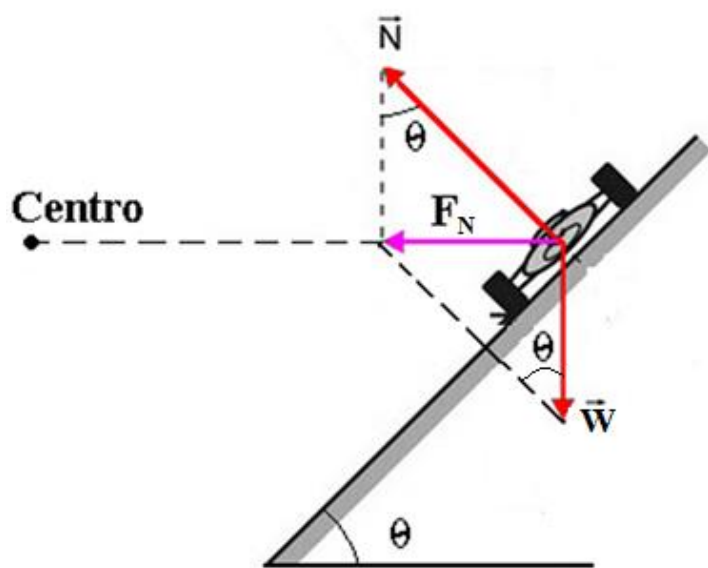
➤ Podemos reescrever as equações anteriores

$$F_T = ma_T = m \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

$$F_N = ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho}$$

Exemplo 8

As vias férreas e as rodovias (antigas) possuíam inclinações nas curvas de modo a produzir a força centrípeta solicitadas pelos veículos nas curvas. Obter o ângulo de inclinação em função da velocidade do veículo.



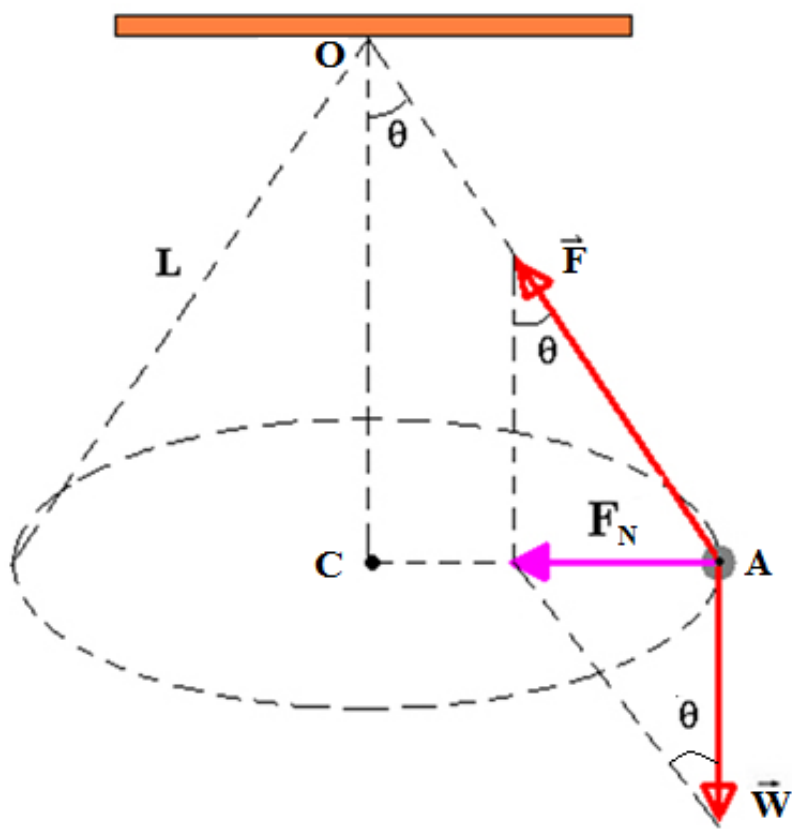
$$F_N = ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_N}{W} = \frac{\rho}{mg} = \frac{v^2}{\rho g}$$

Note que o ângulo independe da massa do corpo.

Exemplo 9

Um fio de comprimento L , ligado a um ponto fixo, tem em uma extremidade uma massa m que gira em torno da vertical com velocidade angular constante ω . Achar o ângulo que a corda faz com a vertical (Pêndulo cônico).



$$R = CA = OA \sin \theta = L \sin \theta$$

$$W = mg$$

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L \sin \theta$$

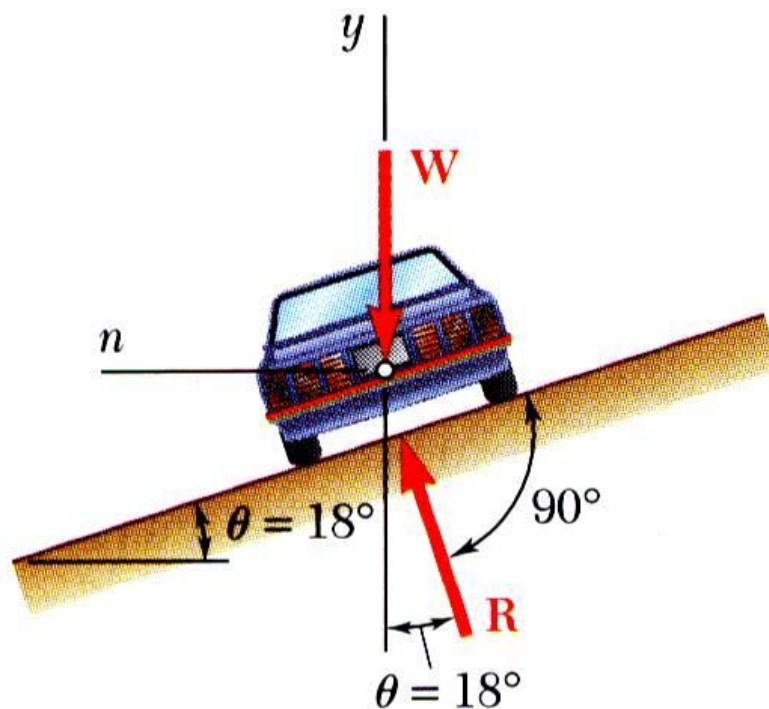
$$\tan \theta = \frac{F_N}{W} = \frac{m\omega^2 L \sin \theta}{mg}$$

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 L \sin \theta}{g}$$

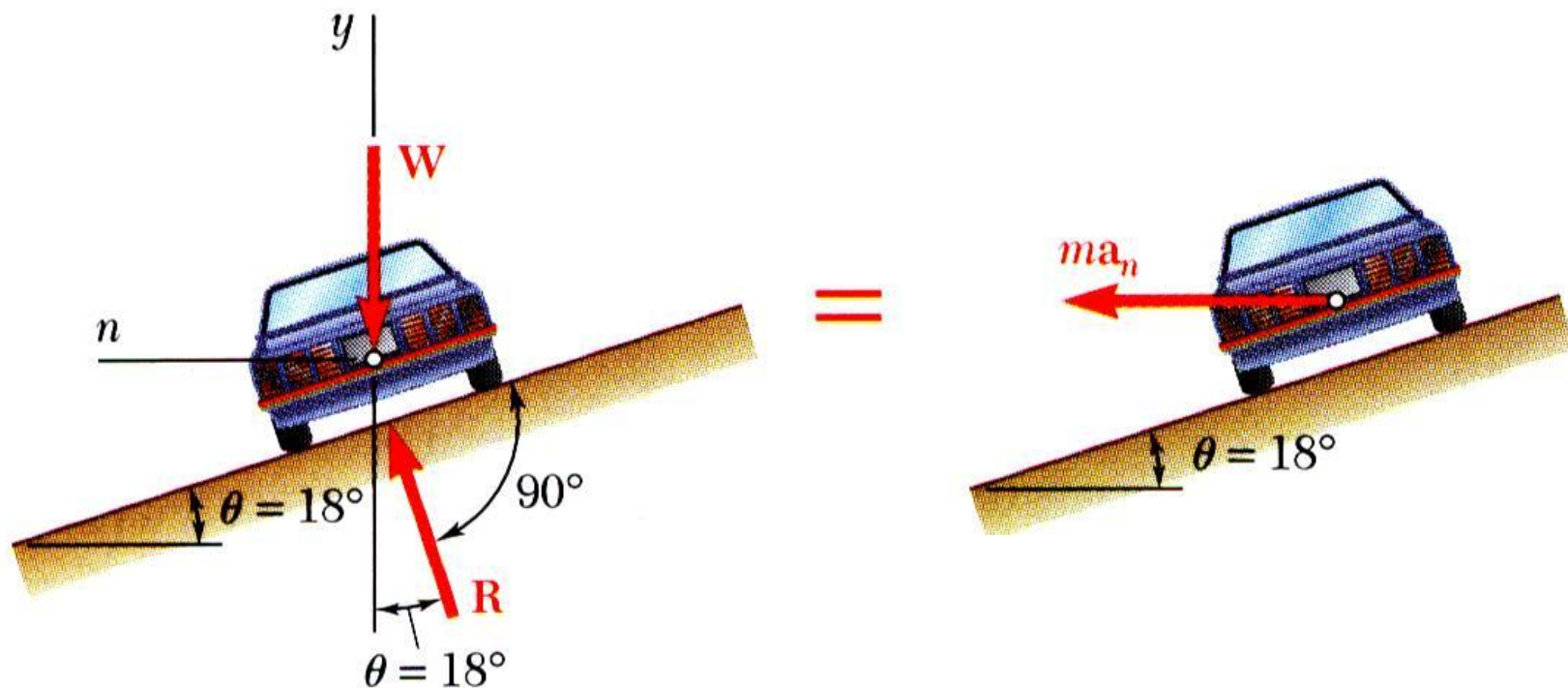
$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L}$$

Exemplo 10

Determinar a velocidade de segurança de uma curva inclinada de estrada de raio $r = 120$ m com inclinação lateral cujo ângulo é $\theta = 18$ graus. A velocidade de segurança de uma curva de estrada com inclinação lateral é a velocidade com que um carro pode trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.



Exemplo 10



SOLUÇÃO:

- Determinar a velocidade nominal de uma curva da estrada de raio $r = 120$ m com inclinação lateral cujo angulo é $\theta = 18$ graus. A velocidade nominal de uma curva da estrada com inclinação lateral é a velocidade com que um carro deve viajar se não houver força de atrito lateral e deve para ser exercida sobre suas rodas.

Exemplo 10

- Resolver a equação de movimento para o carro em componentes vertical e normal.

$$\sum F_y = 0: \quad R \cos \theta - W = 0$$

$$R = \frac{W}{\cos \theta}$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad R \sin \theta = \frac{W}{g} a_n$$

$$\frac{W}{\cos \theta} \sin \theta = \frac{W}{g} \frac{v^2}{\rho}$$

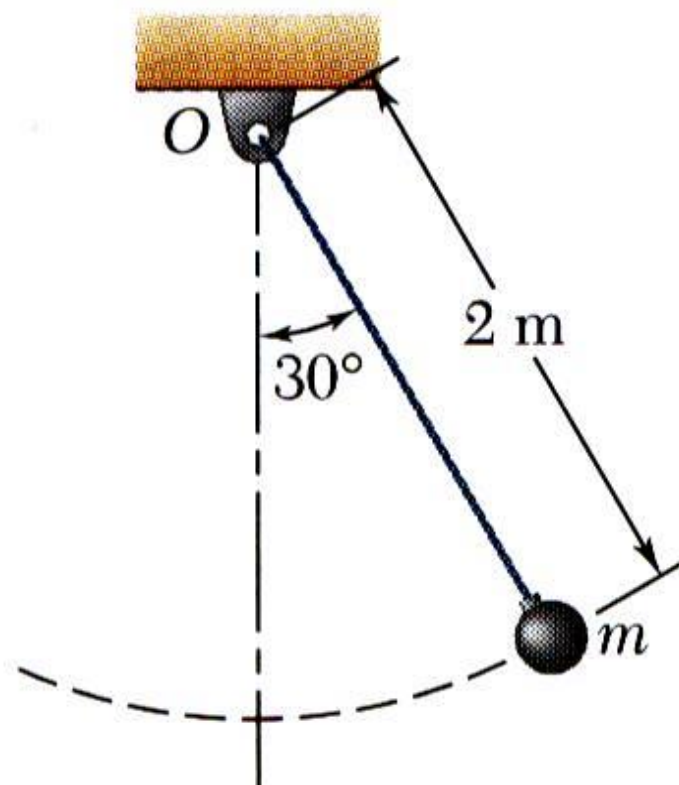
- Resolva para a velocidade do veículo.

$$\begin{aligned} v^2 &= g \rho \tan \theta \\ &= (9,81 \text{ m/s}^2)(120 \text{ m}) \tan 18^\circ \end{aligned}$$

$$v = 70,6 \text{ Km/h}$$

Exemplo 11

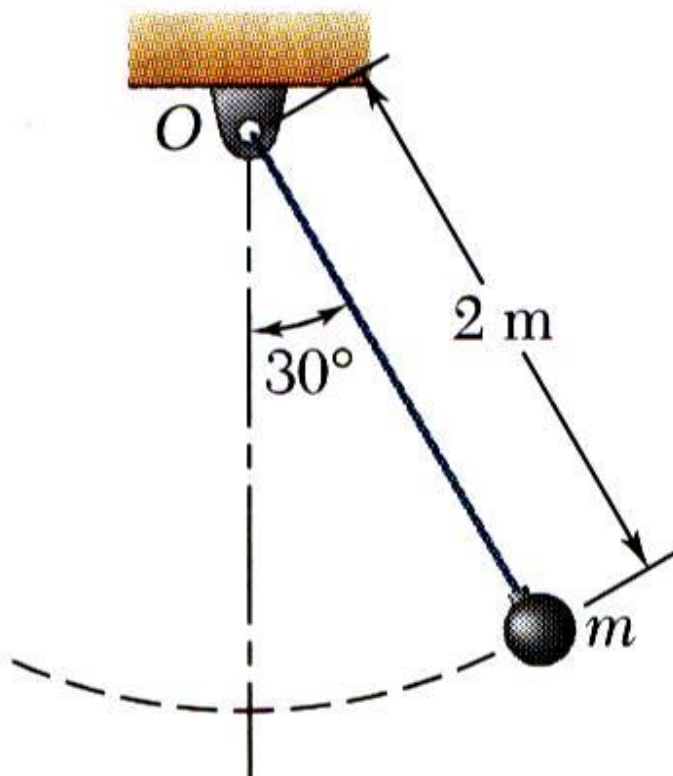
O pêndulo de 2 m descreve um arco de um círculo em um plano vertical. Se a tensão no cabo é de 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada, encontrar a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.



Exemplo 11

SOLUÇÃO:

- Resolver a equação de movimento para o pêndulo em componentes transversal e normal.



- Resolver as equações de componentes para as acelerações normal e transversal.

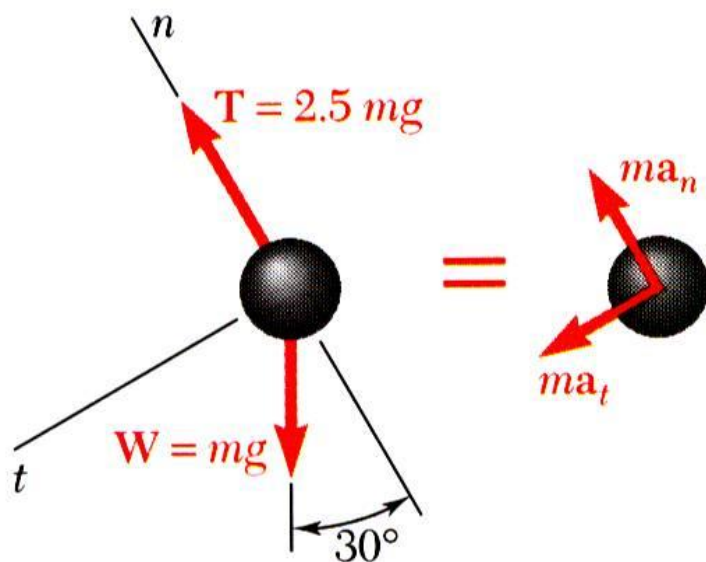
$$\sum F_t = ma_t :$$

$$mg \sin 30^\circ = ma_t$$

$$a_t = g \sin 30^\circ$$

$$a_t = 4.9 \text{ m/s}^2$$

Exemplo 11



$$\sum F_n = ma_n :$$

$$2.5mg - mg \cos 30^\circ = ma_n$$

$$a_n = g(2.5 - \cos 30^\circ)$$

$$a_n = 16.03 \text{ m/s}^2$$

- Resolva para a velocidade em termos de aceleração normal.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v = \sqrt{\rho a_n} = \sqrt{(2 \text{ m})(16.03 \text{ m/s}^2)}$$

$$v = \pm 5.66 \text{ m/s}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas Cartesianas

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

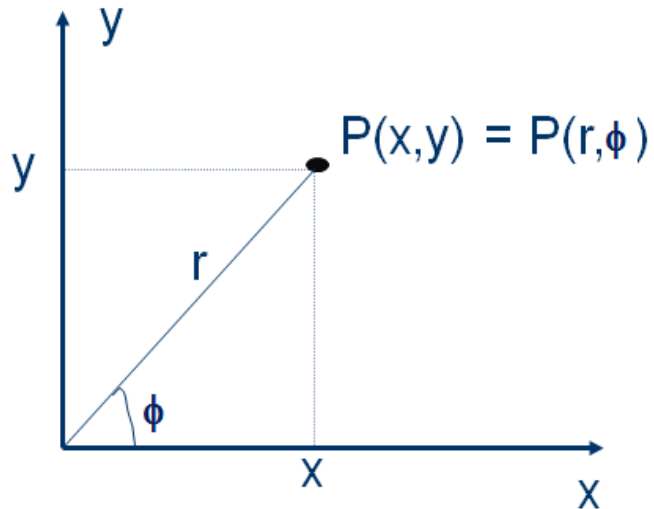
$$\vec{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

$$F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}} = m\ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + m\ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + m\ddot{z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \rightarrow \begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Coordenadas Polares

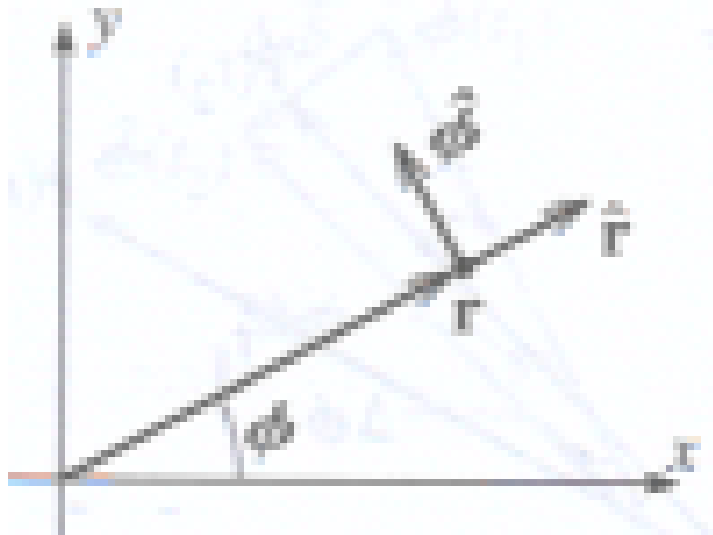


$$r^2 = x^2 + y^2$$

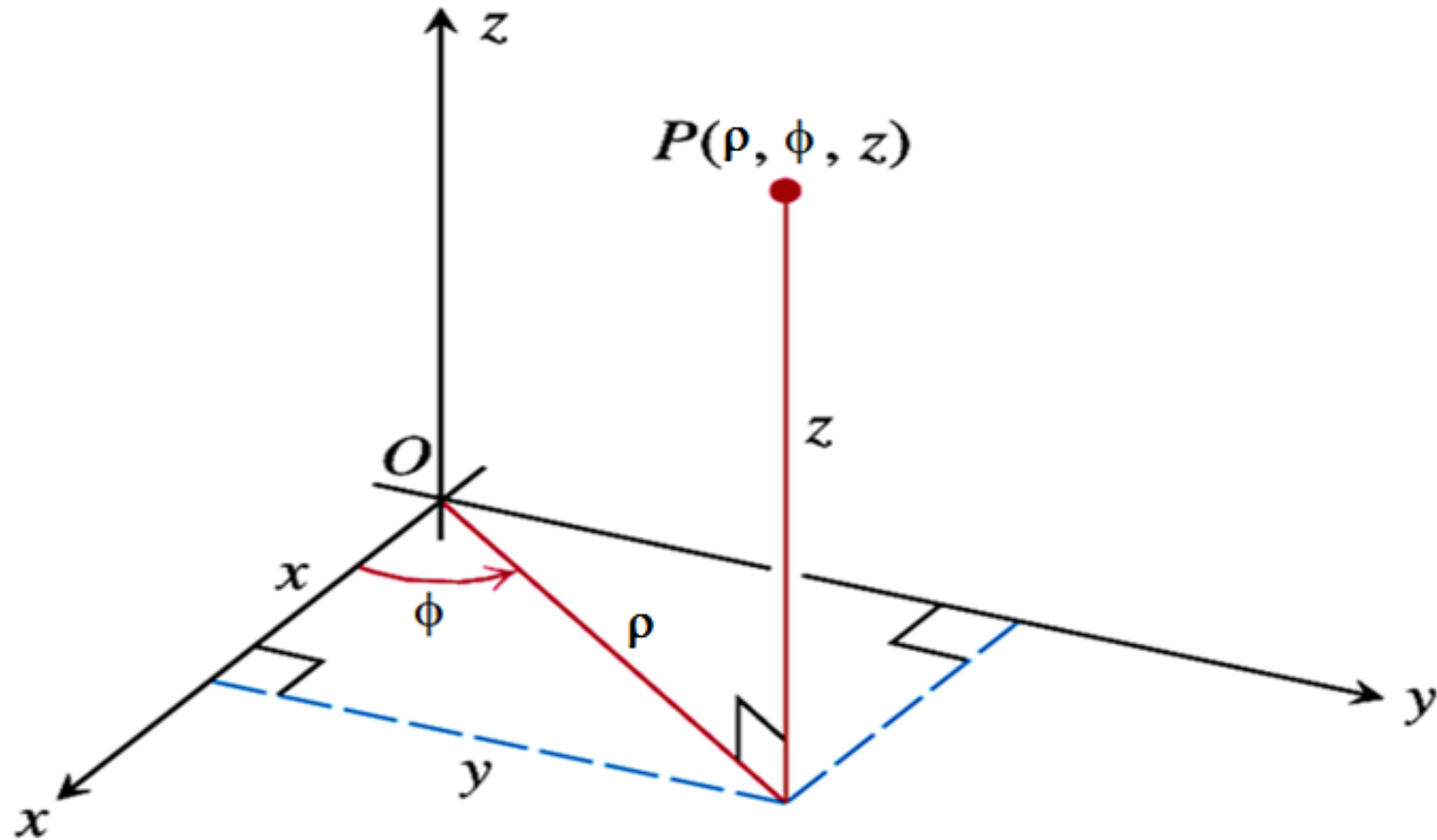
$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$



Coordenadas Cilíndricas



Coordenadas Cilíndricas

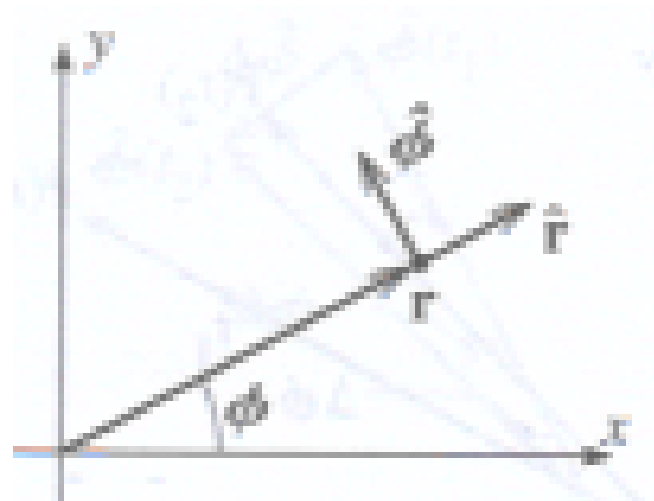
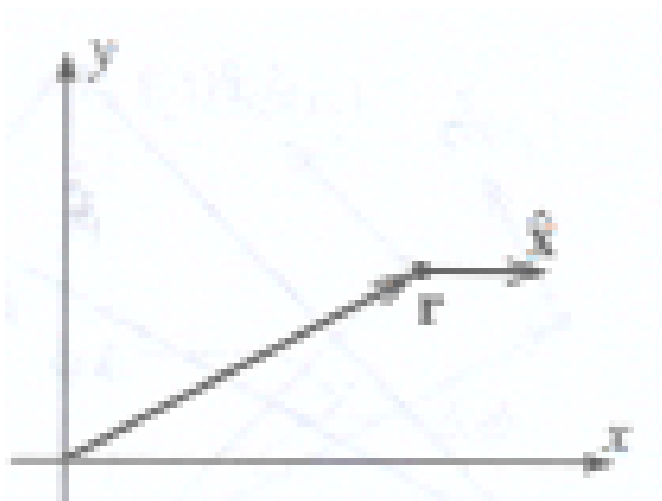
- Para converter de **coordenadas cilíndricas** para **coordenadas retangulares**, usamos as equações

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \quad z = z$$

- enquanto que para converter de **coordenadas retangulares** para **coordenadas cilíndricas**, utilizamos as equações

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} \quad z = z$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares

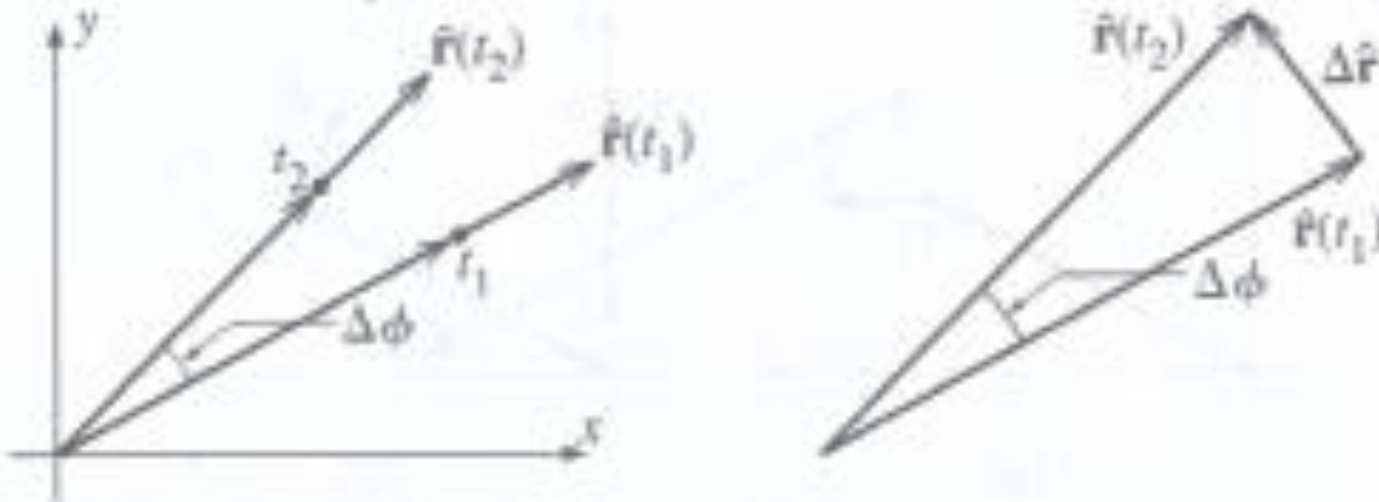


$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares



Para Δt muito pequeno, podemos escrever

$$\Delta \hat{r} \approx \Delta \phi \hat{\phi}$$

$$\Delta \hat{r} \approx \dot{\phi} \Delta t \hat{\phi}$$

Se dividirmos ambos os lados por Δt e tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares

Derivando a equação $\vec{r} = r \hat{r}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$

como $\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}$ temos

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}$$

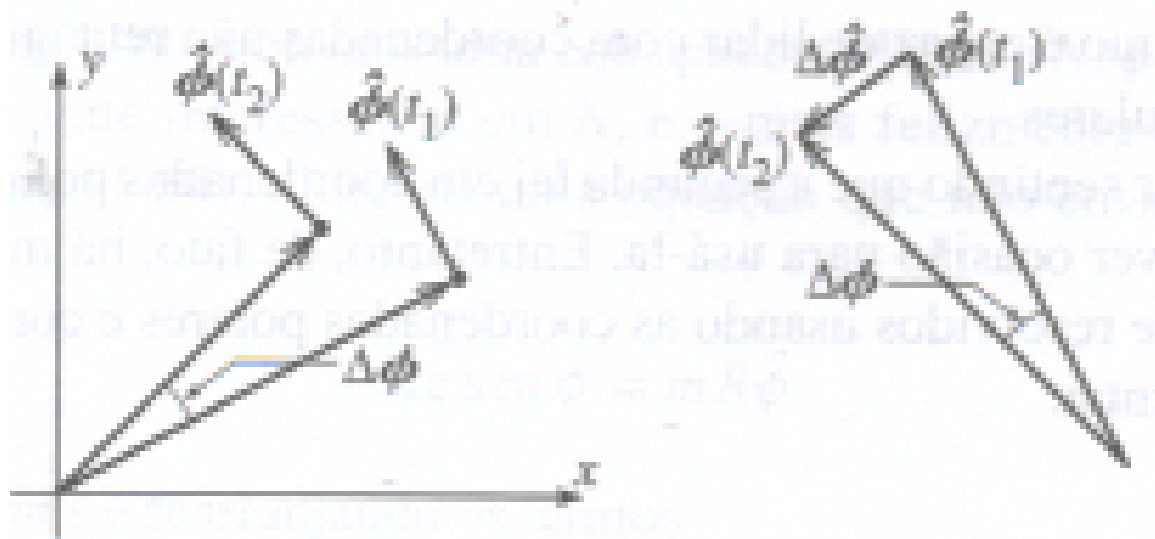
As componentes da velocidade em coordenadas polares:

$$v_r = \dot{r} \quad e \quad v_{\phi} = r \dot{\phi} = r \omega$$

Derivando encontramos a aceleração

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi})$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares



A partir da figura, podemos concluir $\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi} \hat{r}$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares

Derivando a equação $\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi})$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} \right) + \left((\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \hat{\phi} + r \dot{\phi} \frac{d\hat{\phi}}{dt} \right)$$

Usando $\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}$ e $\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi} \hat{r}$

Temos

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \hat{r} + (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \hat{\phi}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}$$

Considerando o caso em que r é constante

$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\hat{r} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi}$$

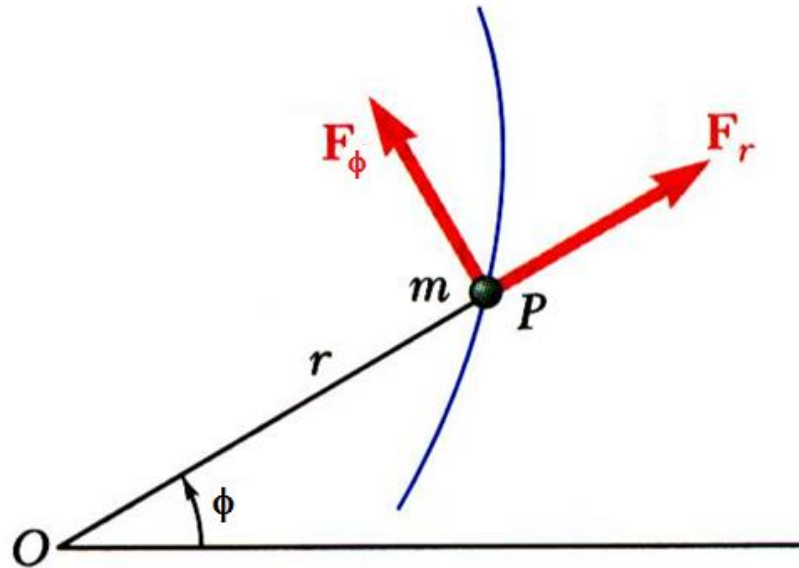
ou

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\varphi}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares

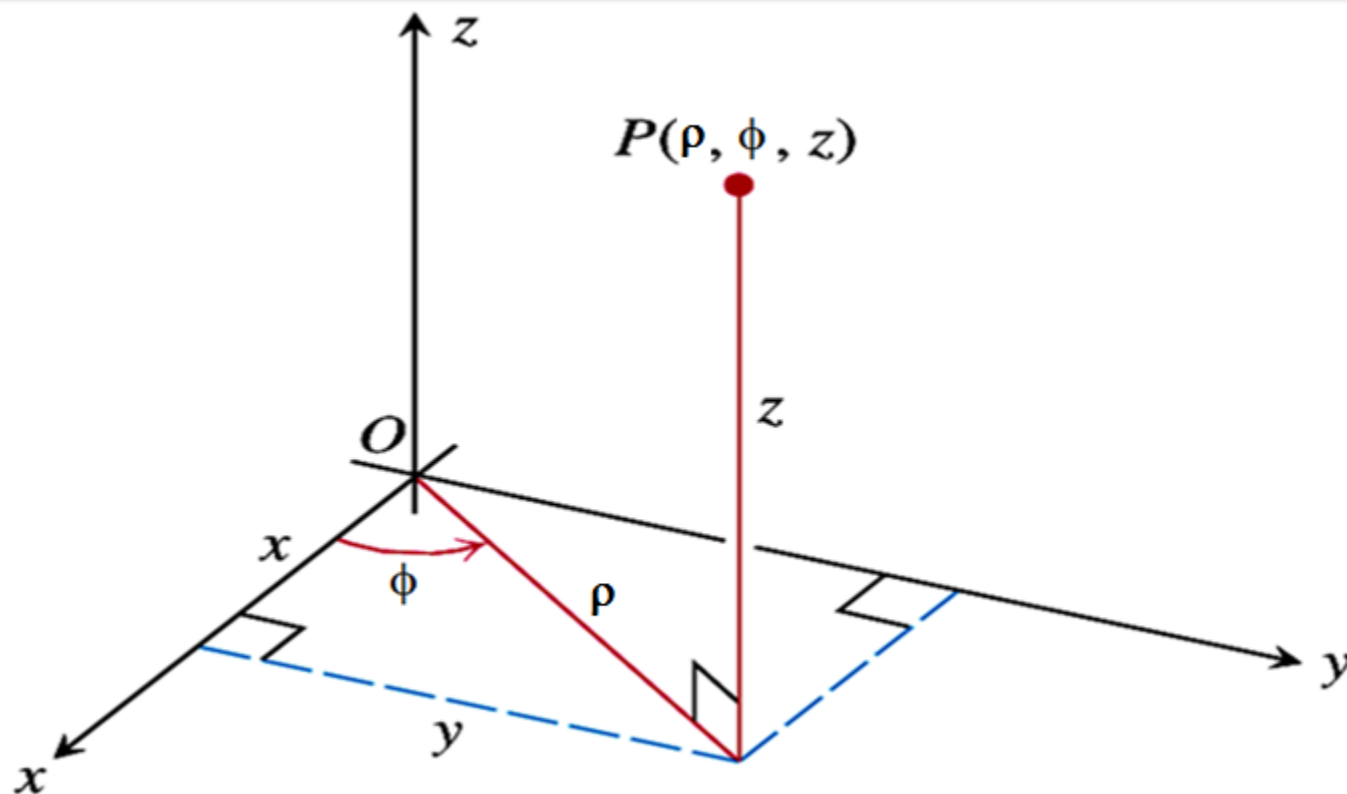
$$\vec{a} = -r \ddot{\phi}^2 \hat{r} + r \ddot{\phi} \hat{\phi}$$

➤ Segunda Lei de Newton em Coordenadas polares



$$\vec{F} = m \vec{a} \rightarrow \begin{cases} F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \end{cases}$$

Segunda Lei de Newton em Coordenadas Cilíndricas



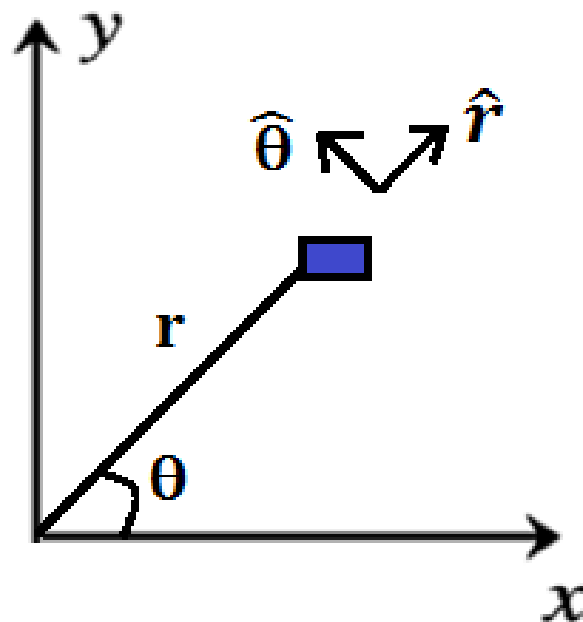
$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_r = m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m (\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi}) \\ F_z = m \ddot{z} \end{cases}$$

Exemplo 12

Uma peça de um mecanismo move-se no trajeto definido pelas equações paramétricas

$$r = \text{sen } \pi t \quad \theta = t^2$$

onde r é em metros, θ em radianos e o t em segundos. Determine a velocidade $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ da peça como função do tempo, usando coordenadas polares.



Exemplo 12

$$r = \text{sen } \pi t \quad \theta = t^2$$

$$v_r = \dot{r} = \pi \cos \pi t \quad v_\theta = r \dot{\theta} = 2 t \text{sen } \pi t$$

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{v} = (\pi \cos \pi t) \hat{r} + (2 t \text{sen } \pi t) \hat{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r (\dot{\theta})^2 = -(\pi^2 + 4t^2)(\text{sen } \pi t)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 4\pi t \cos \pi t + 2 \text{sen } \pi t$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

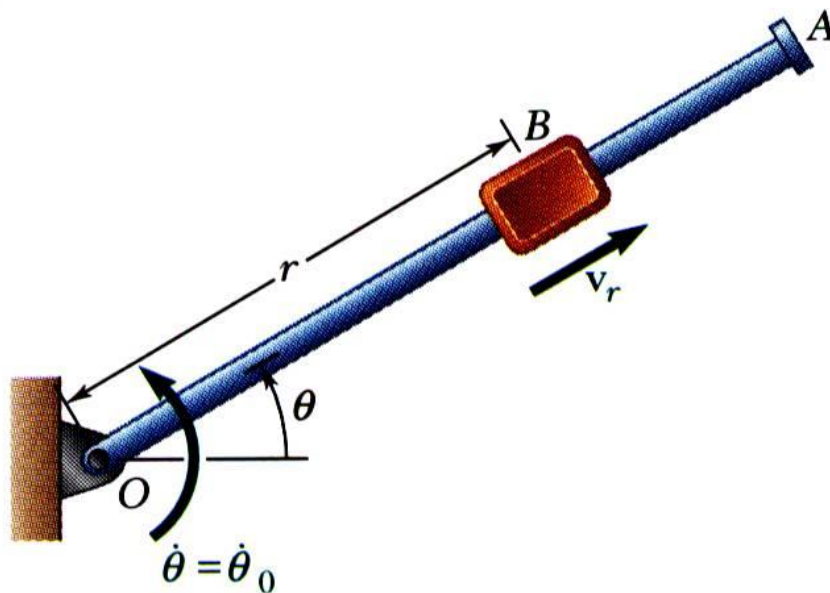
$$\vec{a} = -(\pi^2 + 4t^2)(\text{sen } \pi t) \hat{r} + (4\pi t \cos \pi t + 2 \text{sen } \pi t) \hat{\theta}$$

Exemplo 13

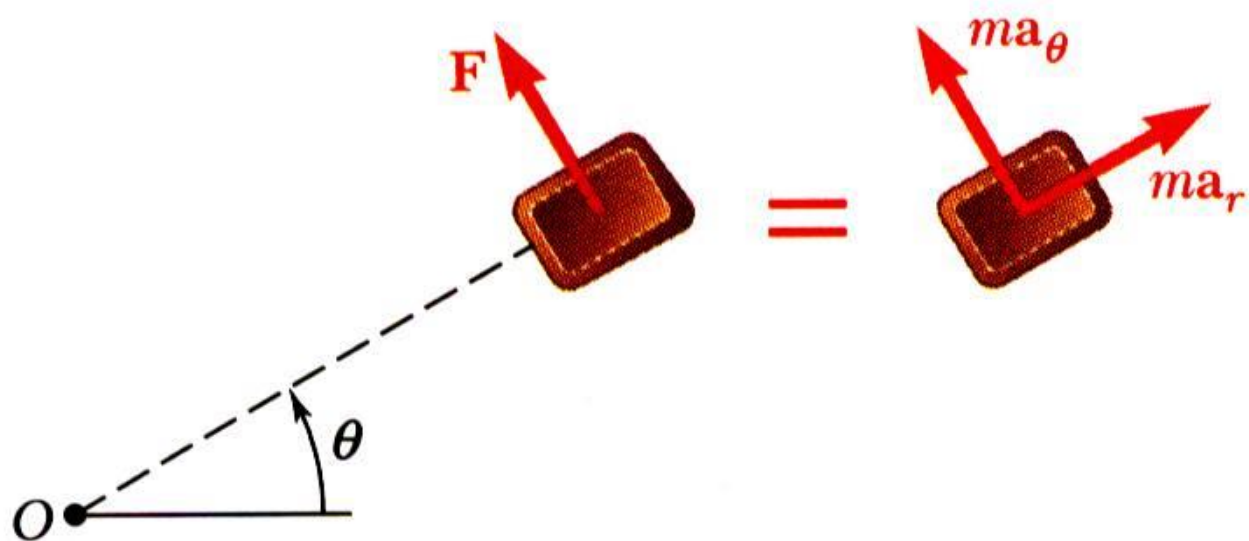
Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA sem atrito que gira em um plano horizontal a uma taxa constante $\dot{\theta}_0$.

Sabendo que B é lançado a uma distância r_0 de O, expressar como função de r :

- a) a componente v_r da velocidade de B ao longo OA e,
- b) o módulo da força horizontal exercida sobre B pelo braço OA.



Exemplo 13



SOLUÇÃO:

- Escreva as equações radial e transversal de movimento para o bloco.

$$\begin{aligned}\sum F_r &= m a_r : \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta &= m a_\theta : \quad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}$$

Exemplo 13

- Integre a equação radial para encontrar uma expressão para a velocidade radial.

$$F_r \Rightarrow 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr}$$

$$v_r dv_r = r\dot{\theta}^2 dr = r\dot{\theta}_0^2 dr$$

$$\int_0^{v_r} v_r dv_r = \dot{\theta}_0^2 \int_{r_0}^r r dr$$

$$v_r^2 = \dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2)$$

Exemplo 13

- Substitua as informações conhecidas na equação transversal para encontrar uma expressão para a força sobre o bloco.

$$F = 2m\theta_0^2 \left(r^2 - r_0^2 \right)^{1/2}$$

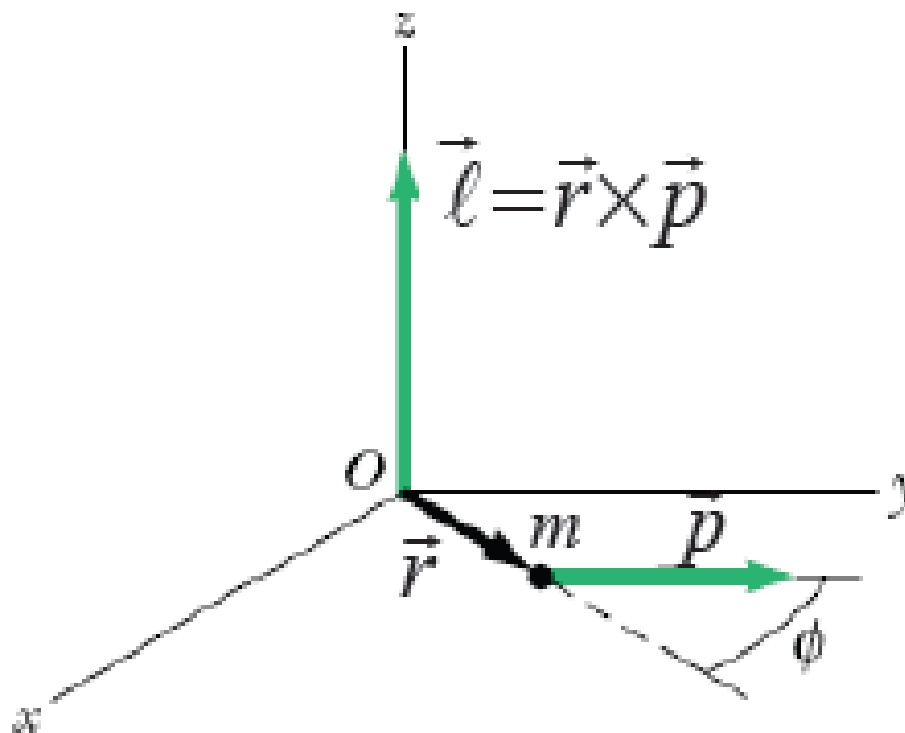
Momento Angular

- o momento angular de uma partícula de momento em relação ao ponto O é:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

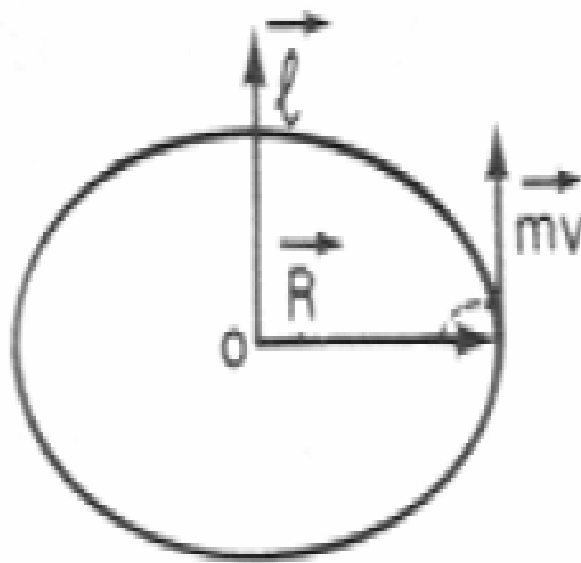
O momento angular é, portanto, um vetor perpendicular ao plano determinado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$.



Momento Angular

- No caso de um movimento circular, quando **O** é o centro da circunferência, os vetores **r** e **v** são perpendiculares, e $v = \omega r$, de modo que

$$L = mrv = mr^2\omega$$

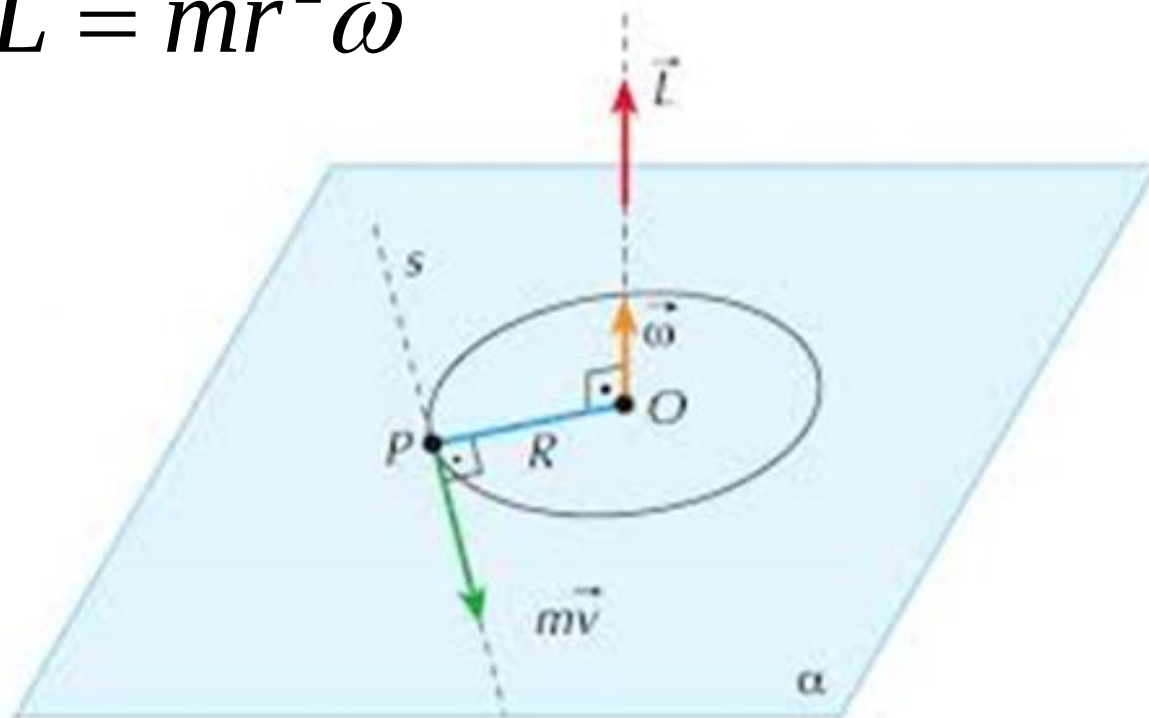


Momento Angular

$$L = mrv = mr^2\omega$$

O sentido de $\mathbf{L}$ coincide com o sentido de $\boldsymbol{\omega}$, de modo que podemos escrever na forma vetorial

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$



Momento Angular

Pode-se escrever o produto vetorial de uma partícula como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

ou em termos das componentes

$$L_x = yp_z - zp_y \quad L_y = zp_x - xp_z \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Note que, para movimento plano, digamos XY, temos $z = 0$ e $p_z = 0$, de modo que $L_x = L_y = 0$, restando apenas a componente L_z . Isto é, o momento angular é perpendicular ao plano.

Momento de uma Força ou Torque

Tomemos a derivada da equação

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{Como } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ e } \vec{p} = m\vec{v}$$

Como $\vec{p}$ é sempre paralelo a $\vec{v}$, de modo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$$

Momento de uma Força ou Torque

Como $\mathbf{p}$ é sempre paralelo a $\mathbf{v}$, de modo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \tau$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau$$

➤ A equação só é correta se $\mathbf{L}$ e τ forem medidos em relação ao mesmo ponto.

Momento de uma Força ou Torque

- *A variação temporal do momento angular de uma partícula é igual ao momento (torque) da força aplicada na partícula.*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau$$

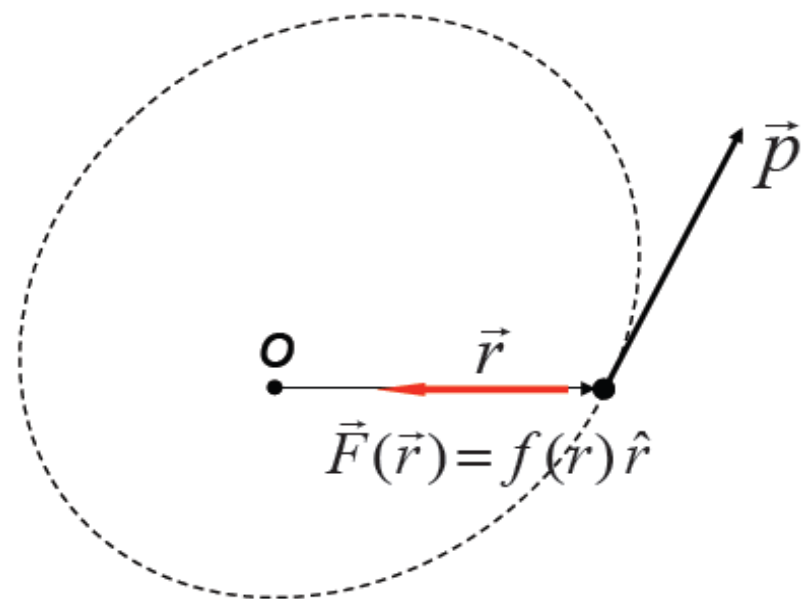
Isso significa que a variação $d\mathbf{L}$ no momento angular durante um pequeno intervalo de tempo dt é paralela ao momento de força τ aplicada à partícula.

Forças Centrais

- São forças cujo vetor $\vec{F}$ está contido em uma reta que passa sempre por um ponto fixo O (centro de forças).
- Há, entretanto, outros casos onde o momento angular se conserva mesmo na presença de forças não nulas. Um exemplo é o de forças centrais, que são forças da forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \underbrace{\vec{r} \times f(r)\hat{r}}_{=0}$$



Forças Centrais

- Torque de uma força central

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} // \vec{F} \rightarrow \vec{\tau} = 0$$

- Todo movimento sobre ação de uma força central é bidimensional
 - Plano definido pela força e velocidade

Forças Centrais

- Se o momento de uma força é na partícula é zero,

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{vetor constante.}$$

- Um movimento devido à ação de forças centrais
 - O momento angular se conserva
- Quando a força é central, o momento angular relativo ao centro de força é uma constante de movimento.

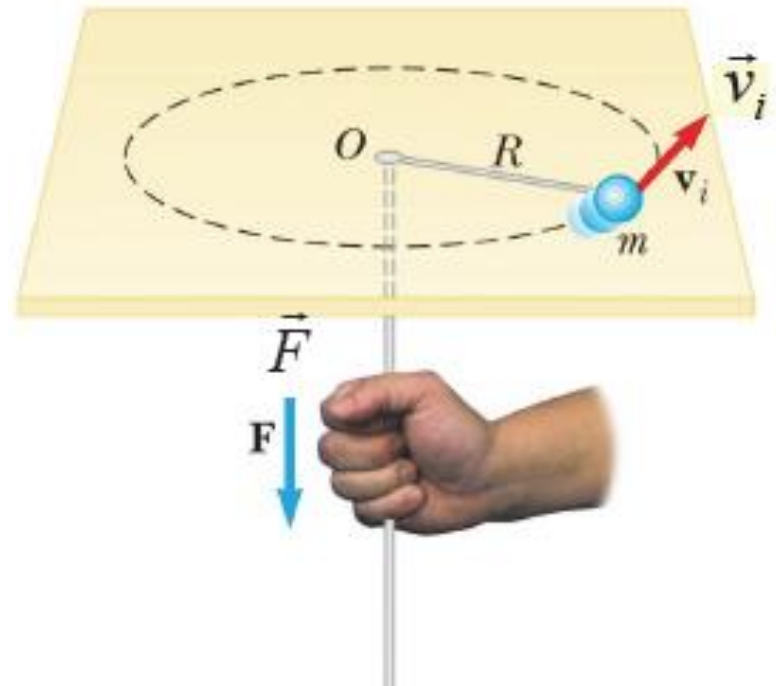
Exemplo 14

Dados R e v_i , determine v_f em função do raio r ;

Como a força é central, o momento angular em relação a O se conserva:

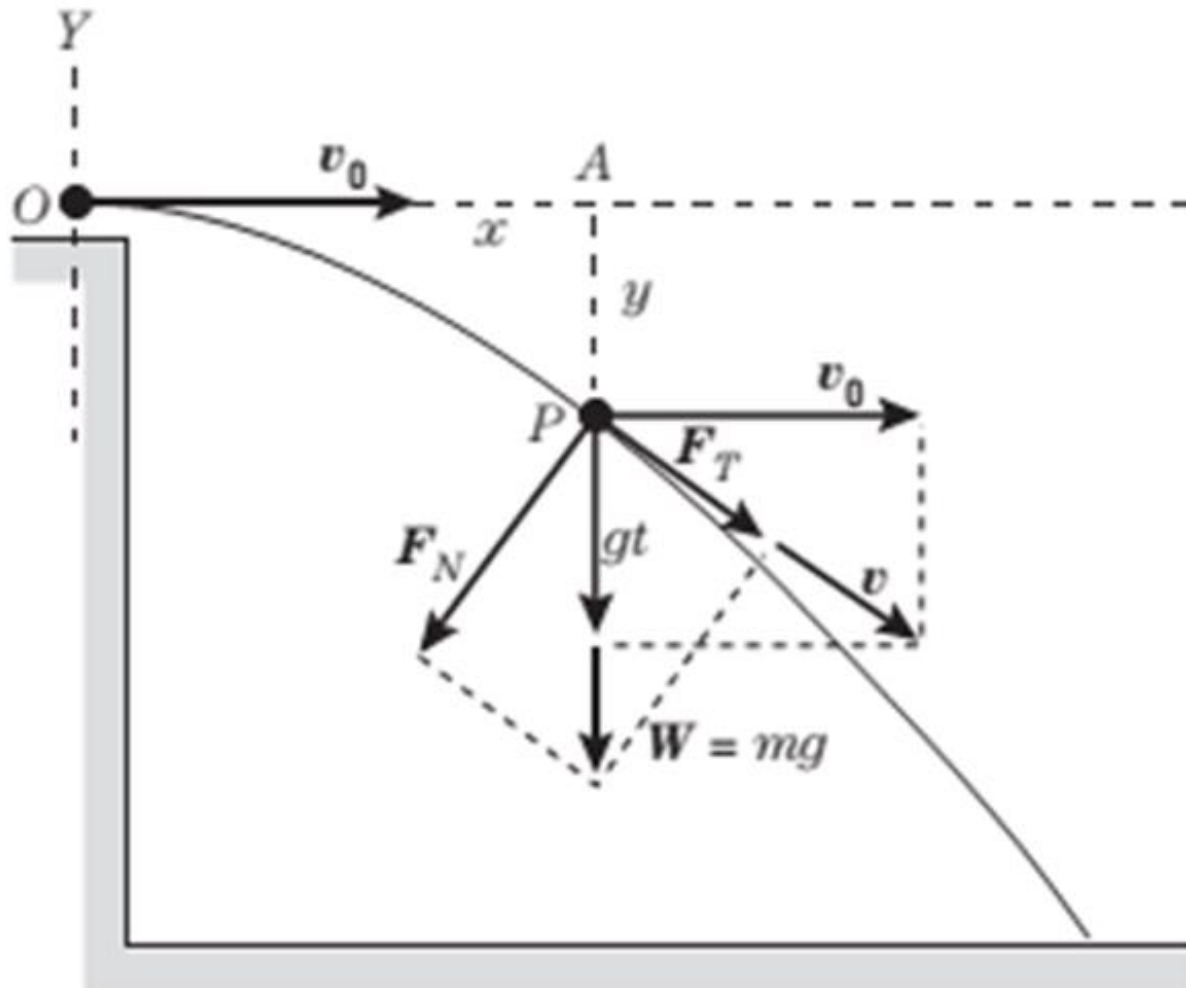
$$L = mrv = \text{const.}$$

$$mv_i R = mv_f r \Rightarrow v_f = \frac{Rv_i}{r}$$



Exemplo 15

Calcular as forças tangencial e normal que atuam em um projétil lançado horizontalmente de cima de um edifício.



Exemplo 15

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \\v_y &= gt \\v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\v &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\end{aligned}$$

$$F_T = m \frac{dv}{dt} = \frac{mg^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$W = \sqrt{F_t^2 + F_N^2} \Rightarrow F_N = \sqrt{W^2 + F_T^2}$$

$$F_N = \frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

Exemplo 16

Determinar para o exemplo 15, o momento angular e o momento de forças relativos a O.

$$x = OA = v_0 t, \quad y = AP = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$L_z = x p_y - y p_x = m(x v_y - y v_x) = -\frac{1}{2} m g v_0 t^2$$

$$\text{Em P, } F_x = 0, \quad F_y = -mg$$

$$\tau_z = x F_y - y F_x = -m g v_0 t$$

Exemplo 16

Observe que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau$ deve ser verificada.

Como $L_z = -\frac{1}{2}mgv_0t^2$ e $\tau_z = -mgv_0t$

podemos mostrar que

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\left(-\frac{1}{2}mgv_0t^{2-1}\right) = -mgv_0t$$

Exemplo 17

Estimar o momento angular da Terra em relação ao Sol. Admitir que a órbita é circular.

$$m = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m} \text{ e } T = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,16 \cdot 10^7 \text{ s}} = 1,98 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

$$L = mr^2\omega = 5,98 \cdot 10^{24} \times 1,49 \cdot 10^{11} \times 1,98 \cdot 10^{-7}$$

$$L = 2,67 \cdot 10^{40} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Exemplo 18

Estimar o momento angular de um elétron relativo ao núcleo do átomo de hidrogênio. Admitir que a órbita é circular.

$$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} \text{ e } \omega = 4,13 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

$$L = mr^2\omega = 9,11 \cdot 10^{-31} \times 5,29 \cdot 10^{-11} \times 4,13 \cdot 10^{16}$$

$$L = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Este resultado numérico constitui uma das mais importantes constantes da Física, e é designada por $\hbar$.

Exemplo 19

Dois objetos estão se movendo como mostra a figura a seguir. Qual é o seu momento angular em torno do ponto O ?

$$m_1 = 6,5\text{kg}$$

$$v_1 = 2,2\text{m/s}$$

$$r_1 = 1,5\text{m}$$

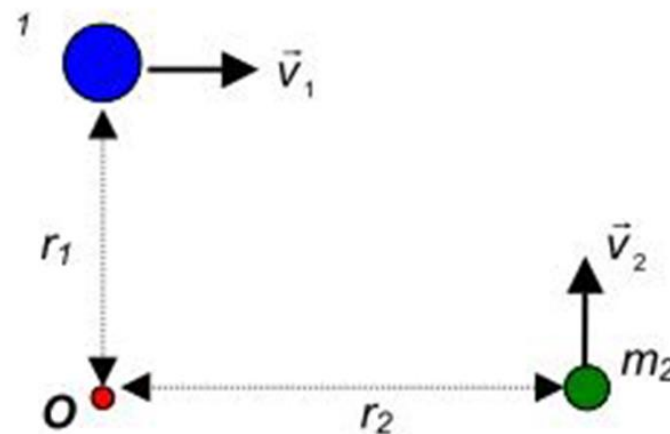
$$m_2 = 3,1\text{kg}$$

$$v_2 = 3,6\text{m/s}$$

$$r_2 = 2,8\text{m}$$

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \hat{i} m_1 v_1 \\ \vec{r}_1 = \hat{j} r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = \hat{j} m_2 v_2 \\ \vec{r}_2 = \hat{i} r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = (\hat{j} \times \hat{i}) m_1 r_1 v_1 = -\hat{k} m_1 r_1 v_1 \\ \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (\hat{i} \times \hat{j}) m_2 r_2 v_2 = +\hat{k} m_2 r_2 v_2 \end{cases}$$

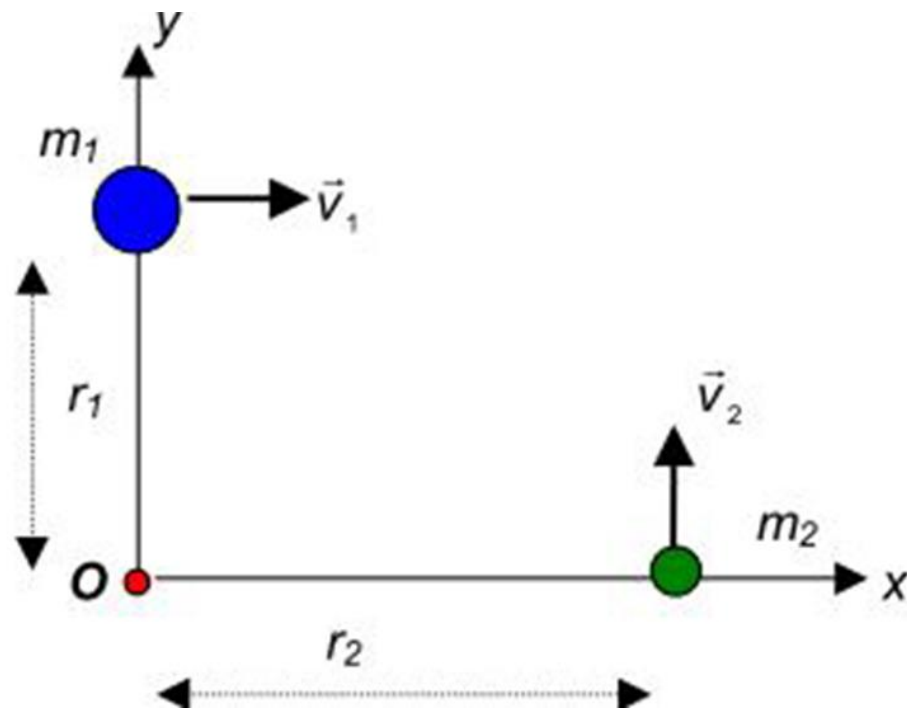


Exemplo 19

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

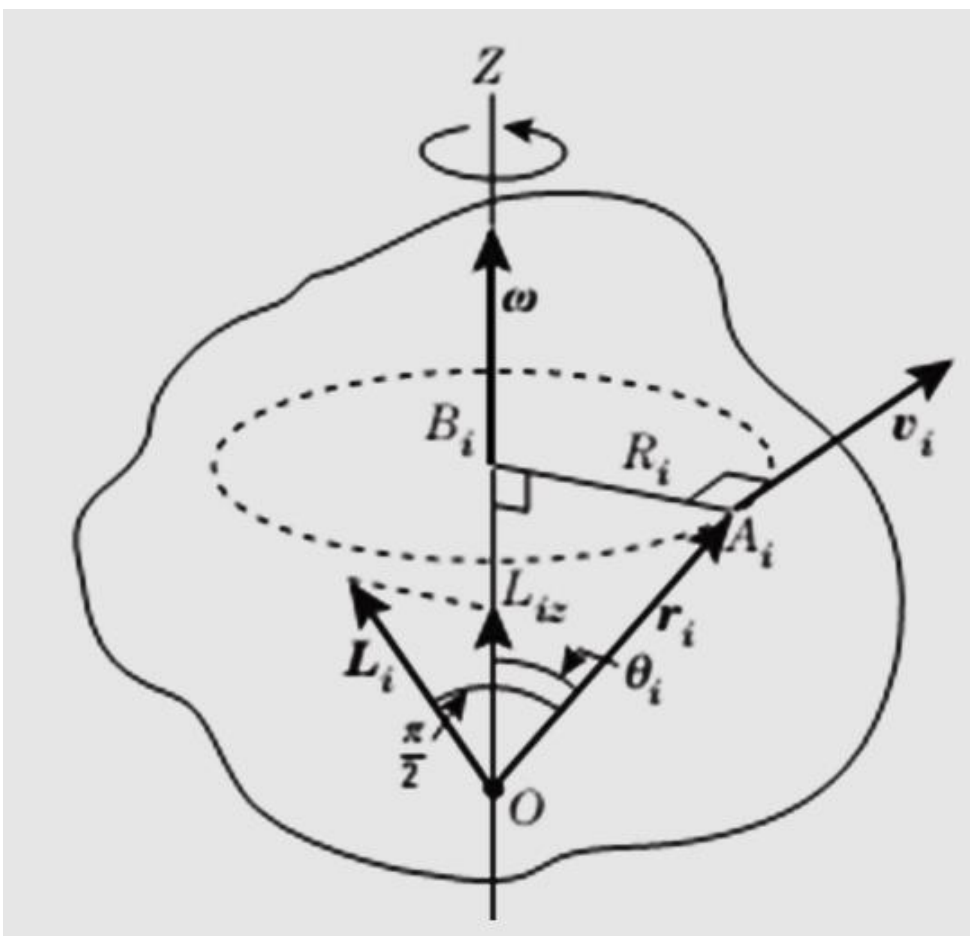
$$\vec{L} = \hat{k} (m_2 v_2 r_2 - m_1 v_1 r_1)$$

$$\vec{L} = \hat{k} 9,798 \text{ kg.m}^2 / \text{s}$$



Momento Angular de um Corpo Rígido

Considerando um corpo rígido girando ao redor do eixo Z, com velocidade angular ω . Cada uma de suas partículas descreve uma órbita circular com centro no eixo Z.



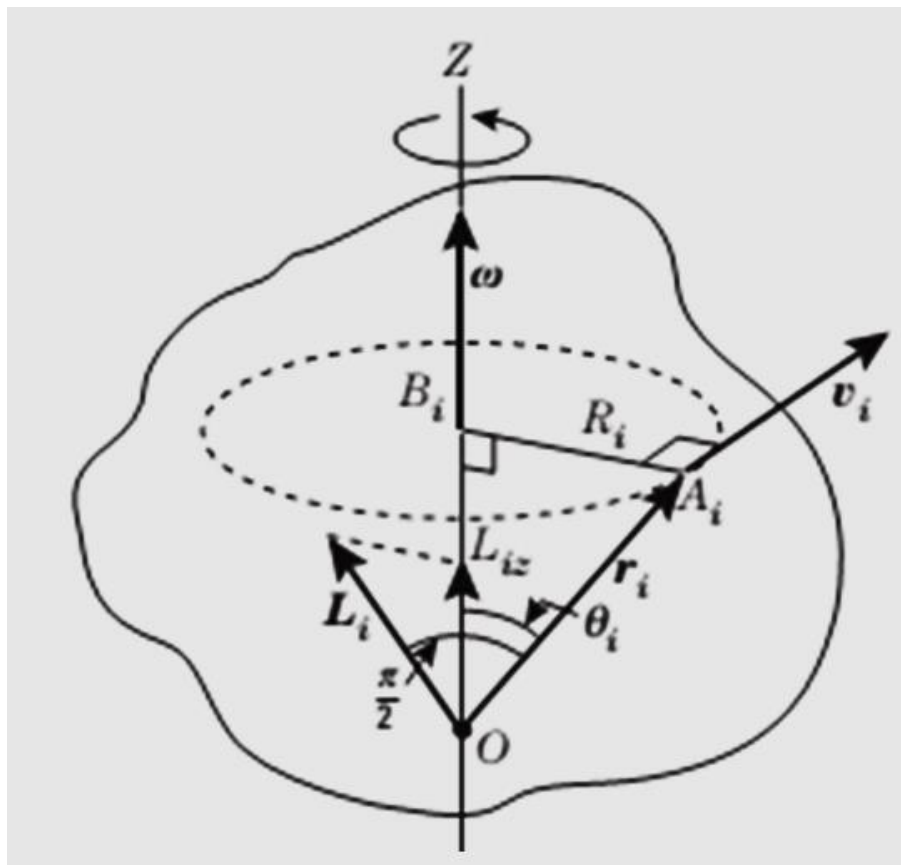
Por exemplo, a partícula A_i descreve o círculo de raio $R_i = A_i B_i$ com uma velocidade $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

$$v_i = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$$

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

Sua direção é perpendicular ao plano determinado pelos vetores $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ e está contido no plano definido por $\mathbf{r}_i$ e pelo eixo Z. Ele faz, portanto, um ângulo $\pi/2 - \theta_i$ com o eixo de rotação Z. O módulo de $\mathbf{L}_i$ é $m_i r_i v_i$, e sua componente paralela ao eixo Z é



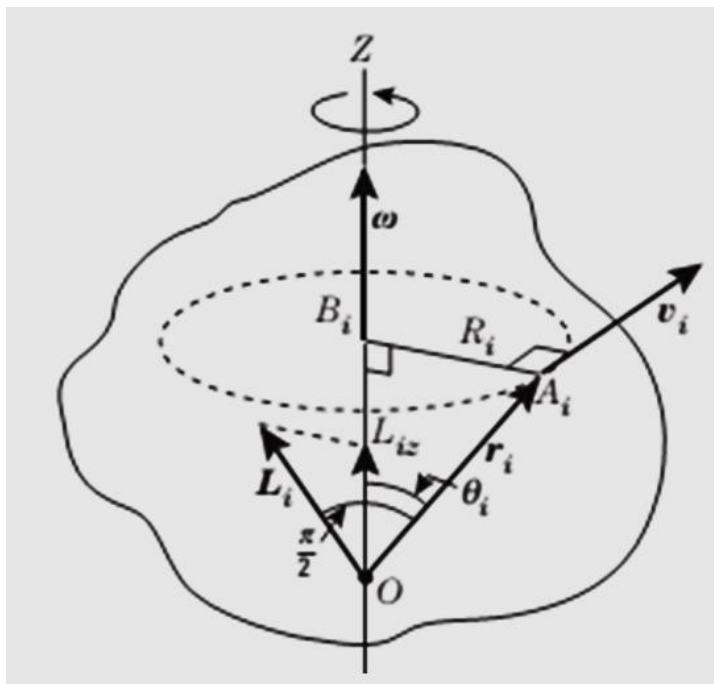
$$L_{iz} = (m_i r_i v_i) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

$$L_{iz} = m_i (r_i \sin\theta_i) (\omega R_i)$$

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

A componente do momento angular total do corpo em rotação ao longo do eixo de rotação Z é



$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \dots = \sum_i L_{iz}$$

$$L_z = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots) \omega$$

$$L_z = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega$$

A quantidade

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots$$

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

I é chamado momento de inércia do corpo relativamente ao eixo de rotação Z.

Momento Angular de um Corpo Rígido

Podemos escrever

$$L_z = m_i R_i^2 \omega$$

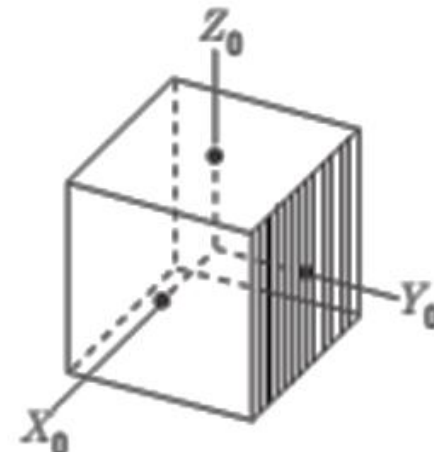
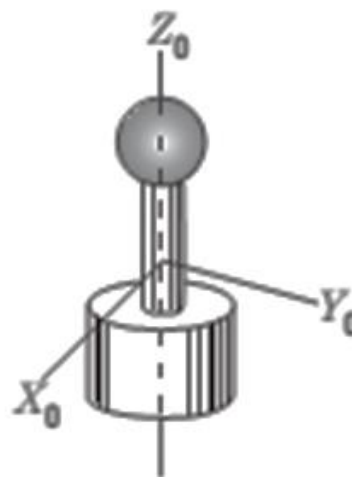
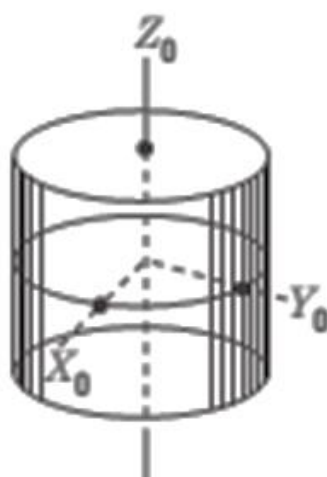
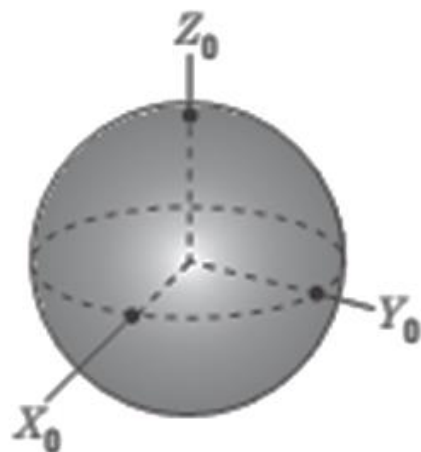
$$L_z = I \omega$$

O momento angular total do corpo é

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_2 + \dots = \sum_i \vec{L}_i$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

Eixos principais de corpos simétricos



Momento Angular de um Corpo Rígido

Quando o corpo gira em torno de um eixo principal de inercia, o momento angular total $\mathbf{L}$ é paralelo à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, que é sempre dirigida ao longo do eixo de rotação, e, em lugar da equação escalar $L_z = I\omega$, podemos escrever a relação vetorial

$$\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega}$$

onde I é o momento principal de inercia correspondente.

- Esta relação vetorial só é válida para rotação em torno de um eixo principal de inercia.

Momento Angular de um Corpo Rígido

Raio de giração - K

Pode ser entendido como a distância da qual uma massa concentrada de valor M (massa) produziria o mesmo momento de inércia.

Para corpos homogêneos, o raio de giração depende apenas de parâmetros geométricos. É uma forma prática de se especificar indiretamente o momento de inércia, de acordo com a forma do corpo. Nesta tabela, são dados os raios de giração para algumas formas comuns, considerados em relação aos eixos de simetria indicados.

Momento Angular de um Corpo Rígido

Raio de giração - K

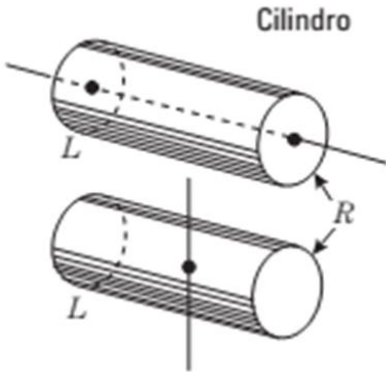
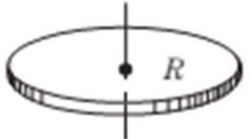
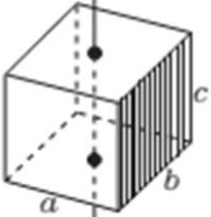
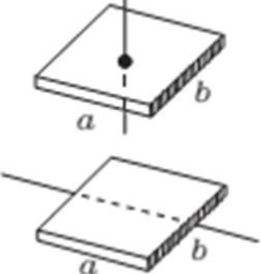
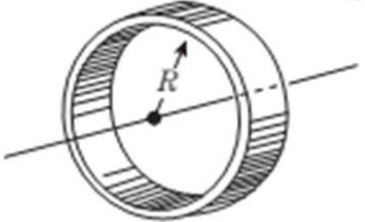
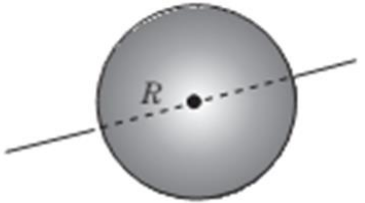
O raio de giração de um corpo é a quantidade K definida de tal modo que vale a relação

$$I = Mk^2 \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

onde I é momento de inercia e M a massa do corpo.

- k representa a distância ao eixo em que toda massa poderia ser concentrada sem variar o momento de inércia.

Momento Angular de um Corpo Rígido

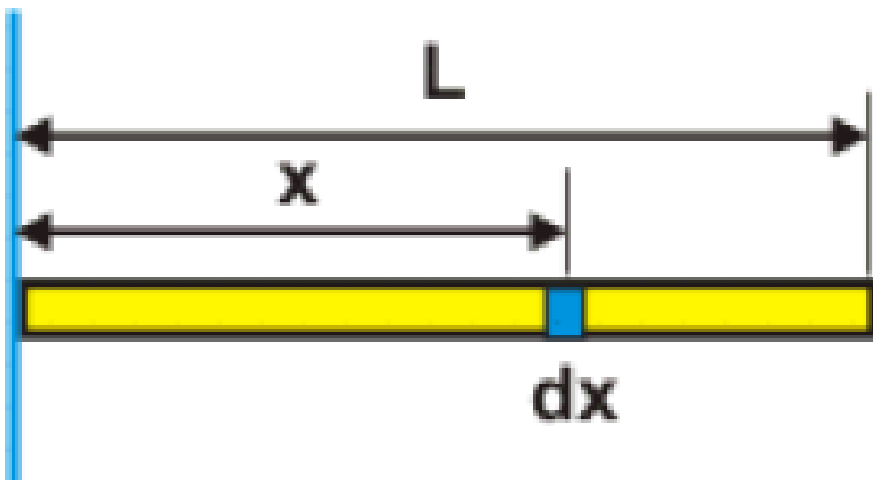
K^2	Eixo	K^2	Eixo
$\frac{R^2}{2}$	 Cilindro	$\frac{L^2}{12}$	 Haste fina
$\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$		$\frac{R^2}{2}$	 Disco
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	 Paralelepípedo	$\frac{R^2}{4}$	
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	 Placa retangular	R^2	 Aro
$\frac{b^2}{12}$		$\frac{2R^2}{5}$	 Esfera

Raios de giração de alguns sólidos simples

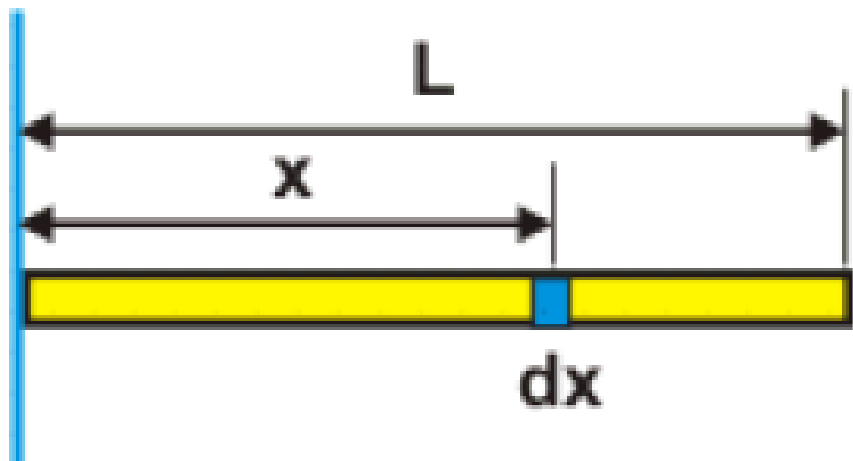
Exemplo 20

a) Como calcular o momento de inércia de uma barra retilínea de material homogêneo em relação a um eixo perpendicular à barra, passando pela sua extremidade?

Sendo a barra de material homogêneo os comprimentos são proporcionais às massas, isto é, a cada elemento de massa corresponderá um elemento de comprimento. O momento de inércia da barra é a soma dos momentos de inércia de cada elemento da barra, ou seja



Exemplo 20



$$\frac{L}{M} = \frac{x}{m} = \frac{dx}{dm}$$

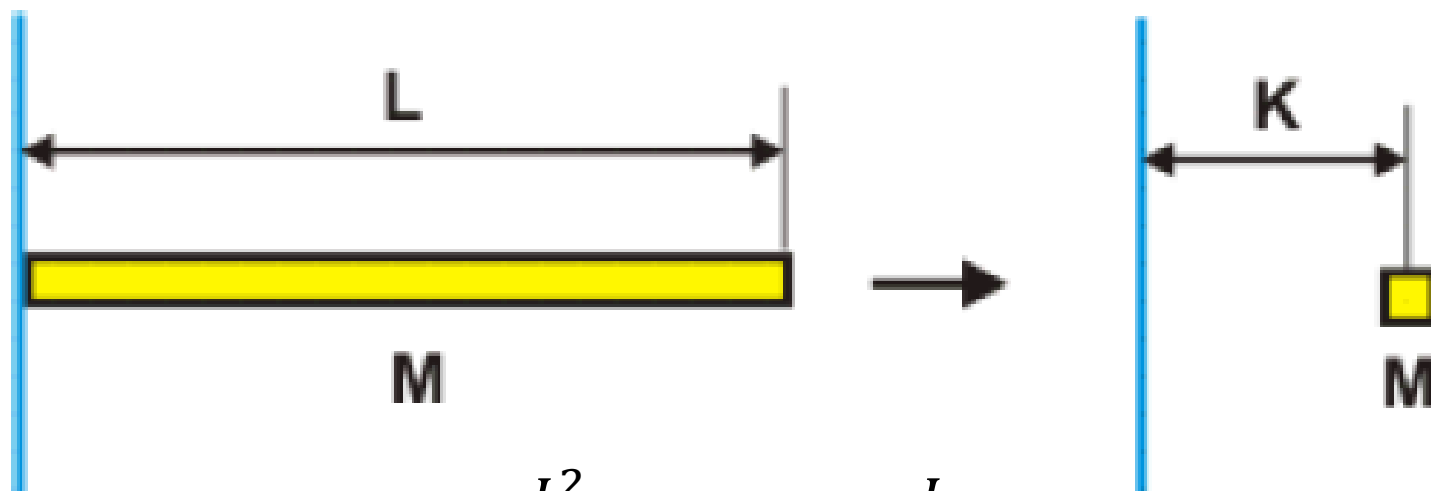
$$I = \int dI = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 dx \frac{M}{L} = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^L = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{3} L^2 M$$

Exemplo 20

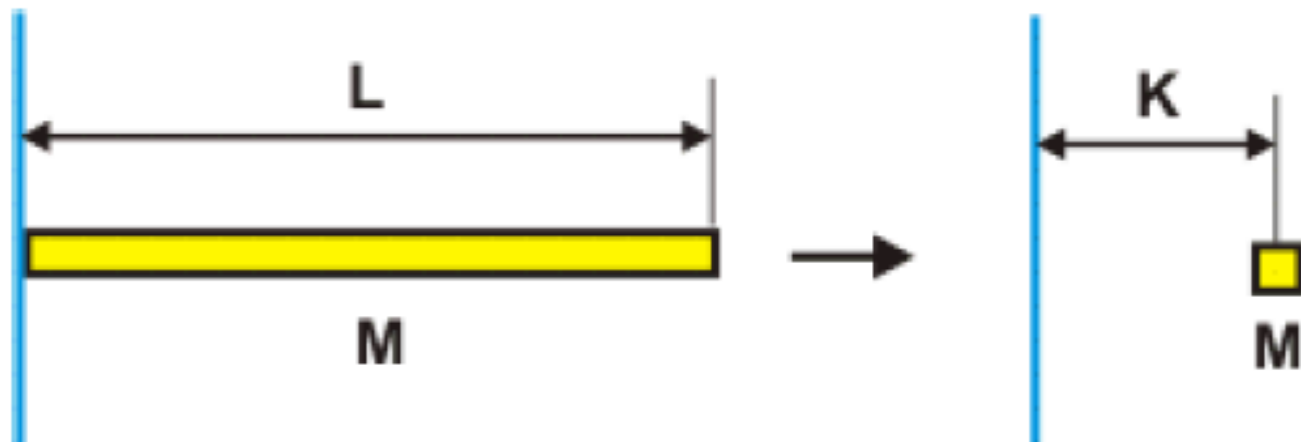
b) Como calcular o raio de giração de uma barra retilínea de material homogêneo em relação a um Eixo perpendicular à barra, passando pela sua extremidade?

Sabemos que o raio de giração K corresponde à distância do eixo na qual devemos concentrar toda a massa para obtermos o mesmo momento de inércia, logo



$$k^2 = \frac{L^2}{3} \rightarrow k = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 20



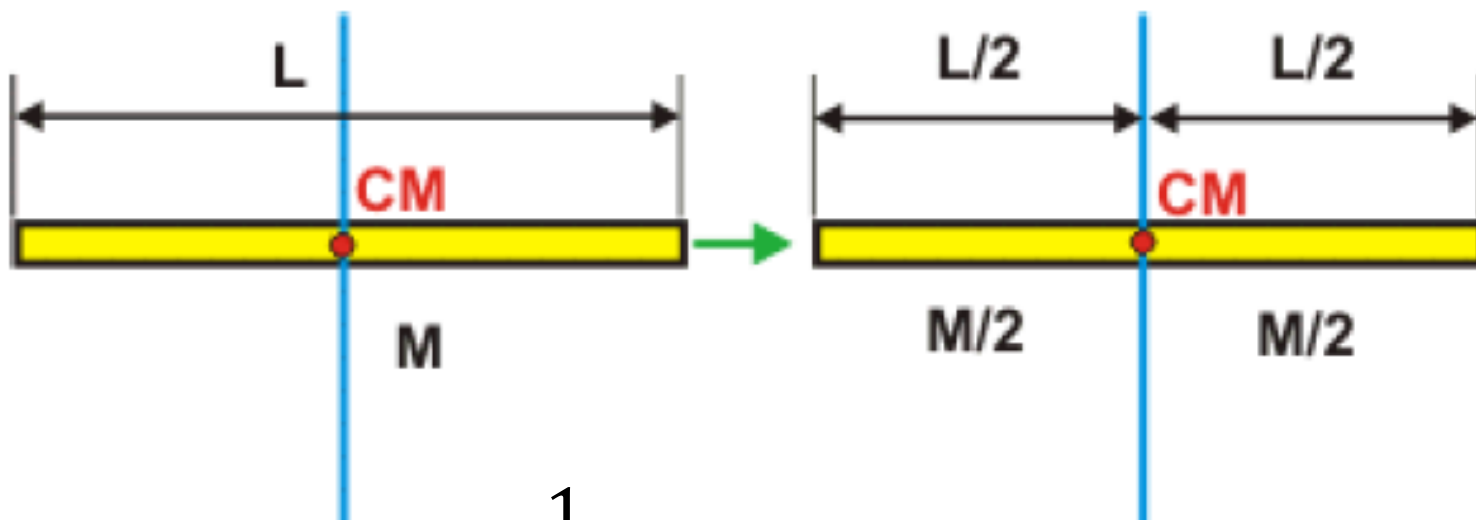
$$I = k^2 M \rightarrow I = \frac{1}{3} L^2 M \quad (\text{I, calculado no item a})$$

$$k^2 M = \frac{1}{3} L^2 M \rightarrow k^2 = \frac{1}{3} L^2 \rightarrow k = L \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 20

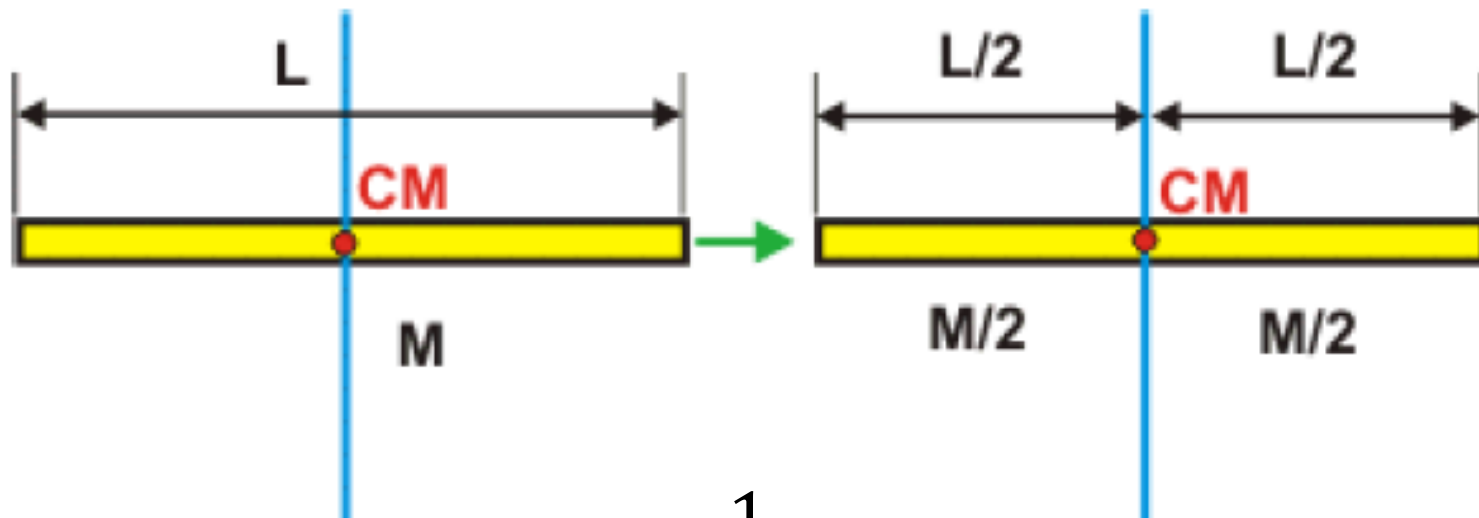
c) Como calcular o momento de inércia de uma barra retilínea de material homogêneo em relação a um eixo perpendicular à barra, passando pelo Centro de Massa?

A barra poderá ser dividida ao meio sendo o seu momento de inércia a soma dos momentos de inércia de cada pedaço



$$I = \frac{1}{3} L^2 M \quad \Rightarrow \quad (I, \text{ calculado no item a) }$$

Exemplo 20



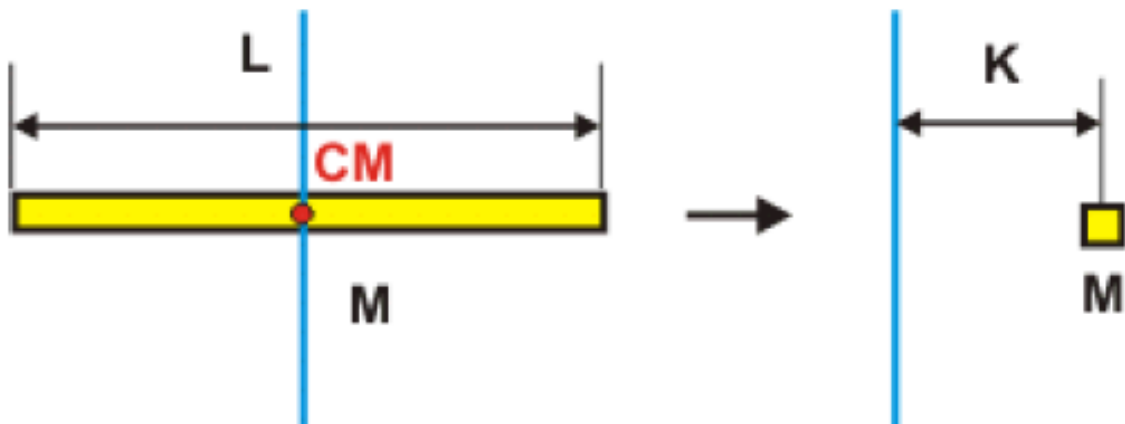
$$I = \frac{1}{3} L^2 M$$

$$I = \frac{1}{3} \left| \frac{L}{2} \right|^2 \frac{M}{2} + \frac{1}{3} \left| \frac{L}{2} \right|^2 \frac{M}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{12} L^2 M$$

Exemplo 20

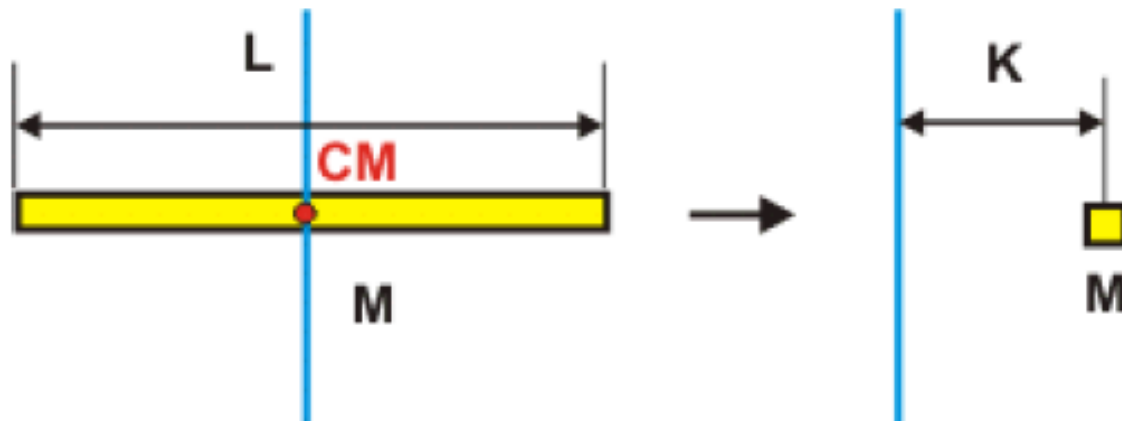
d) Como calcular o raio de giração de uma barra retilínea de material homogêneo em relação a um eixo perpendicular à barra, passando pelo Centro de Massa?

Sabemos que o raio de giração K corresponde à distância do eixo na qual devemos concentrar toda a massa para obtermos o mesmo momento de inércia, logo



$$I = \frac{1}{12} L^2 M$$

Exemplo 20



$$k^2 = \frac{L^2}{12} \rightarrow k = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1}{12} L^2 M$$

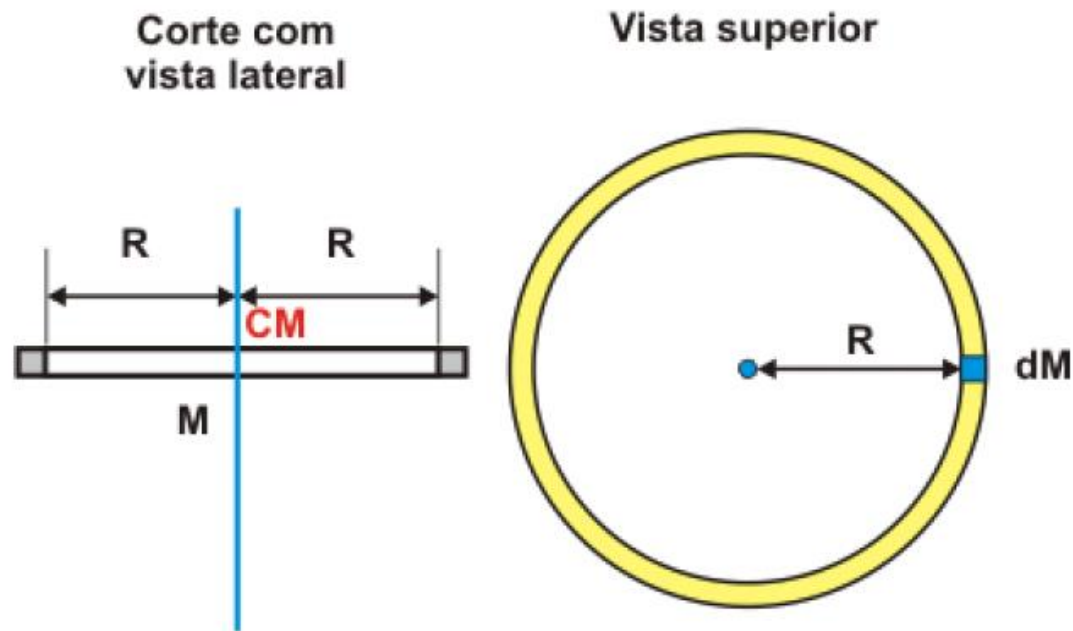
$$I = k^2 M \rightarrow I = \frac{1}{12} L^2 M \rightarrow k^2 M = \frac{1}{12} L^2 M$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{3}} L$$

Exemplo 21

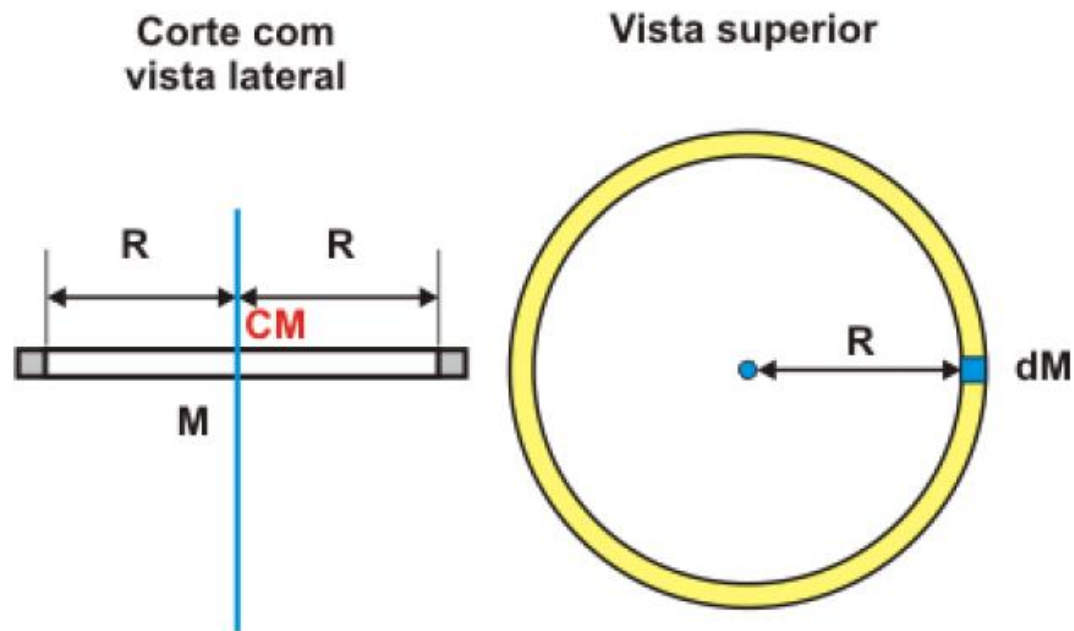
a) Como calcular o momento de inércia de uma barra circular de material homogêneo em relação a um eixo perpendicular à barra, passando pelo Centro de Massa?

Sendo a barra de material homogêneo os comprimentos são proporcionais às massas, isto é, a cada elemento de massa corresponderá um elemento de comprimento.



Exemplo 21

O momento de inércia da barra é a soma dos momentos de inércia de cada elemento da barra, ou seja



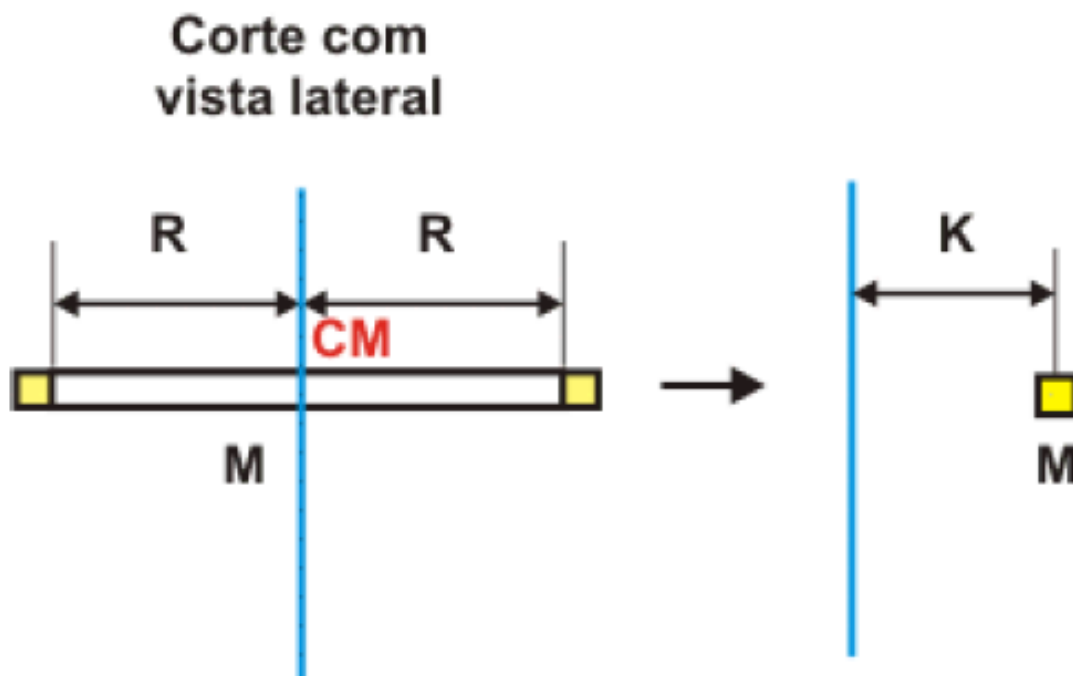
$$I = \int dI \rightarrow I \int R^2 \cdot dM \rightarrow I = R^2 \int dM$$

$$I = R^2 M$$

Exemplo 21

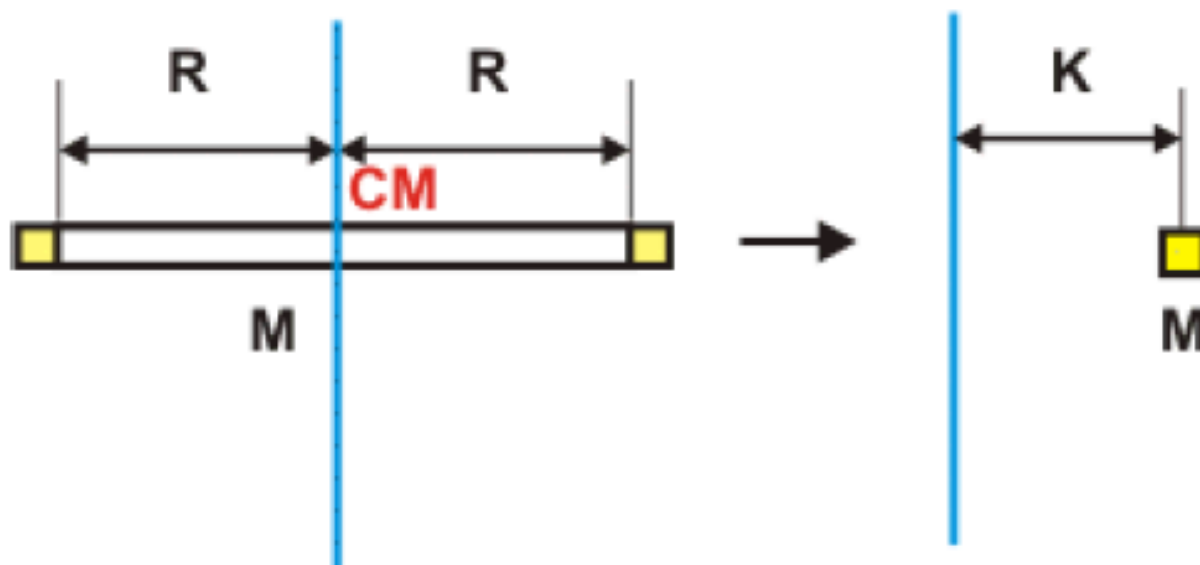
b) Como calcular o raio de giração de uma barra circular de material homogêneo em relação a um eixo perpendicular à barra, passando pelo Centro de Massa?

Sabemos que o raio de giração K corresponde à distância do eixo na qual devemos concentrar toda a massa para obtermos o mesmo momento de inércia, logo:



Exemplo 21

Corte com
vista lateral



$$I = R^2 M$$

$$I = R^2 M \rightarrow I = k^2 M$$

$$R^2 M = k^2 M \rightarrow k = R$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\tau = \sum_i \vec{\tau}_i$$

$$\tau = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \tau = I\alpha$$

Se $\tau = 0$, $I\omega = \text{cont.}$; se o momento de inércia é constante, então ω também é constante. Isto é, *um corpo rígido que gira em torno de um eixo principal move-se com velocidade angular constante quando não é aplicado um torque externo.*

Exemplo 22

Ache o momento angular da Terra em sua rotação em torno do próprio eixo. Suponha que a Terra seja uma esfera uniforme.

Dentro da aproximação referida no enunciado, o momento angular da Terra vale:

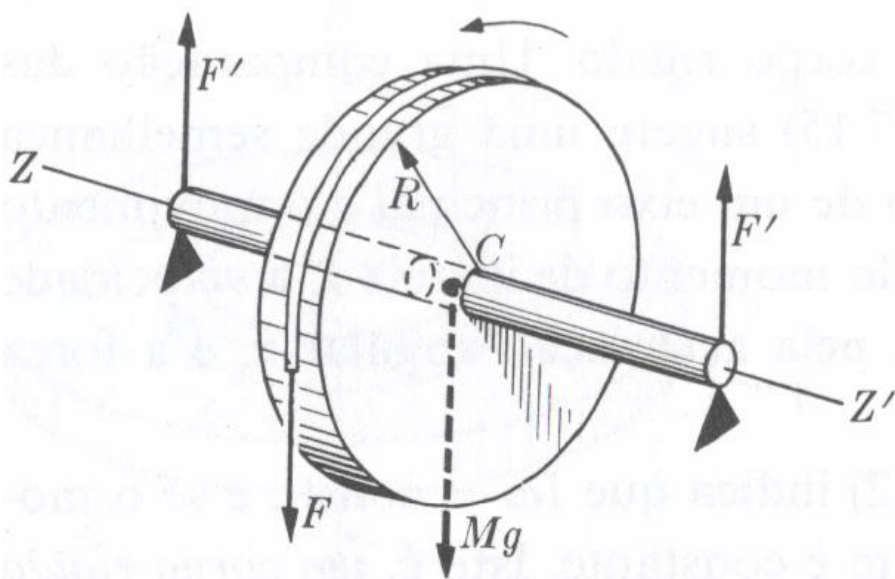
$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$L = \frac{4\pi MR^2}{5T} = \frac{4\pi (5,98 \times 10^{24} \text{ kg}) (6,37 \times 10^6 \text{ m})^2}{5 \left(24 \text{ h} \times 3.600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right)} = 7,0583 \dots \times 10^{33} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

$$L \approx 7,06 \times 10^{33} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

Exemplo 23

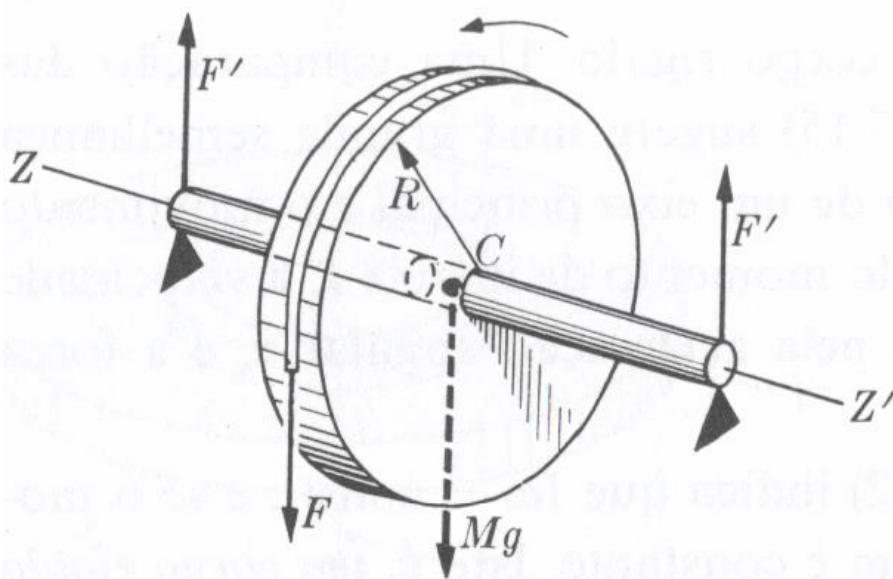
Um disco de raio 0,5 m e 20 kg de massa gira livremente em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro. Aplica-se uma força de 9,8 N puxando-se um fio enrolado em sua borda. Determine a aceleração angular do disco e sua velocidade angular após 2 s.



$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

Exemplo 23

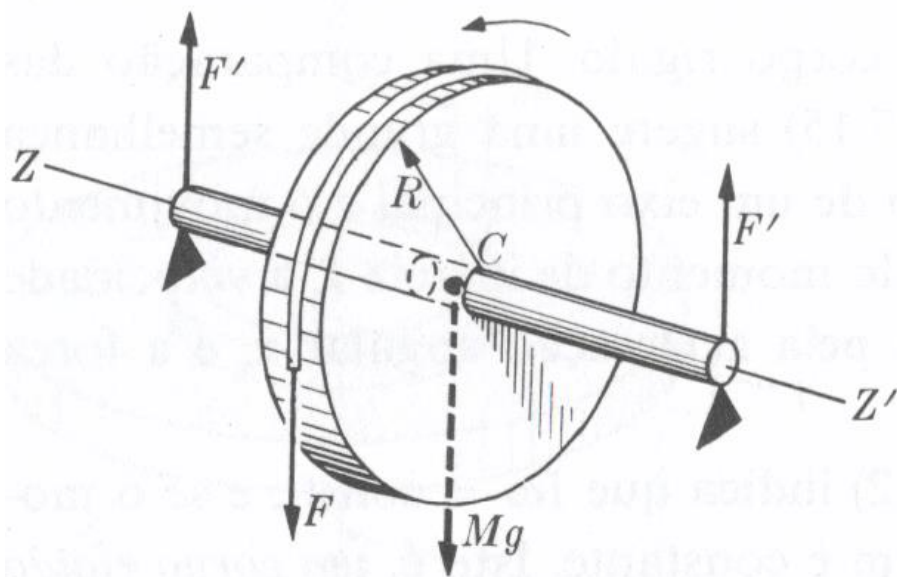
Um disco de raio $0,5\text{ m}$ e 20 kg de massa gira livremente em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro. Aplica-se uma força de $9,8\text{ N}$ puxando-se um fio enrolado em sua borda. Determine a aceleração angular do disco e sua velocidade angular após 2 s .



As forças externas que atuam sobre o disco são o seu peso Mg , a tração F para baixo e as forças F' nos suportes. O eixo ZZ' é um eixo principal.

Exemplo 23

Considerando os torques com relação ao centro de massa C, verificamos que o torque devido ao peso é zero. O torque combinado de das forças F' também é zero.



$$\tau = FR$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\tau = I\alpha$$

$$FR = \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \alpha$$

$$F = \frac{1}{2}MR\alpha$$

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9,8)}{(20)(0,5)} = 1.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Exemplo 23

A velocidade angular depois de 2 s, se o disco partiu do repouso, é

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \Rightarrow \omega = \alpha t = (1,96)(2) = 3,92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Desde que o centro de massa C é fixo, sua aceleração é zero; devemos ter então

$$2F' - Mg - F = 0$$

$$2F' - (20)(9,8) - 9,8 = 0$$

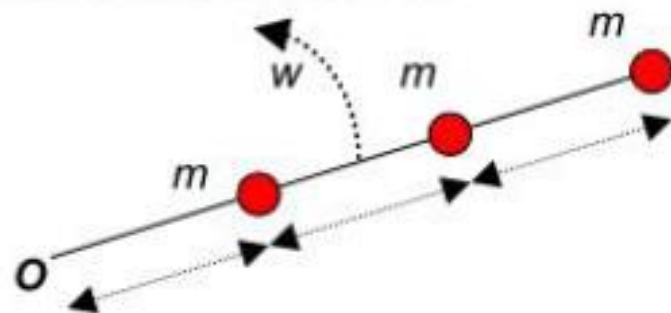
$$F' = 102,9 \text{ N}$$

Exemplo 24

Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento L , como mostra a figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em O com velocidade angular w , de tal forma que as partículas permanecem em linha reta. Quais são, em termos de m , L e w e relativamente ao ponto O

a) O momento de Inércia do conjunto?

$$I = m L^2 + m (2L)^2 + m (3L)^2 = 14 m L^2$$



b) O momento angular da partícula do meio?

Se definirmos o eixo z como sendo perpendicular à folha de papel e saindo dela, o momento angular das três partículas estarão no sentido positivo do eixo z .

$$L_2 = I_2 w = 4 m L^2 w$$

c) O momento angular total das três partículas?

$$L = I w = 14 m L^2 w$$

Exemplo 25

As rodas A e B da figura a seguir estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior que o raio da roda A.

- a) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem o mesmo momento angular?

$$r_B = 3 r_A$$

Como as duas rodas estão conectadas, as velocidades das suas bordas serão iguais, ou seja:

$$v_A = v_B$$

ou seja:

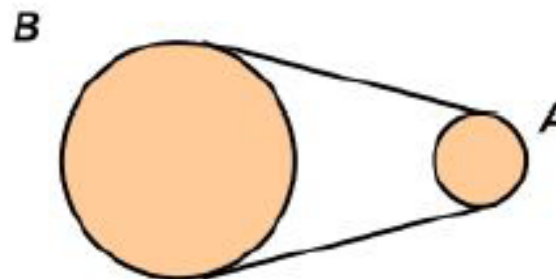
$$w_A r_A = w_B r_B \Rightarrow \frac{w_A}{w_B} = \frac{r_B}{r_A} = 3 \quad \therefore w_A = 3 w_B$$

$$L_A = I_A w_A$$

$$L_B = I_B w_B$$

Como $L_A = L_B$

$$I_A w_A = I_B w_B \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{w_B}{w_A} \quad \therefore \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{3}$$



Exemplo 25

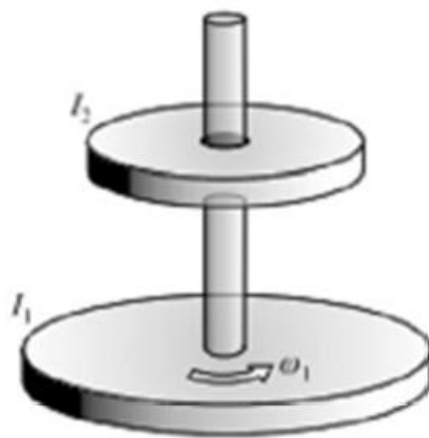
- b) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

Como $K_A = K_B$

$$\frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 \therefore \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{9}$$

Exemplo 26

Um disco cujo momento de inércia vale $I_1 = 1,27 \text{ kg.m}^2$ gira com velocidade angular de $\omega_1 = 824 \text{ rev/min}$ em torno de um eixo vertical de momento de inércia desprezível. Um segundo disco, de momento de inércia $I_2 = 4,85 \text{ kg.m}^2$, inicialmente em repouso $\omega_2 = 0$, é acoplado bruscamente ao mesmo eixo. Qual será a velocidade angular ω da combinação dos dois discos girando juntos com a mesma velocidade angular?



Exemplo 26

Solução: Como não existem torques externos sobre o sistema, o momento angular é conservado e obtemos que

$$L_i = I_1\omega_1 + 0 = L_f = \omega(I_1 + I_2).$$

Portanto, a velocidade angular dos discos se movendo juntos vale $\omega = 17,9 \text{ rad/s}$.