MECÂNICA GERAL BÁSICA – PARTE 2

Mecânica Geral Básica

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE

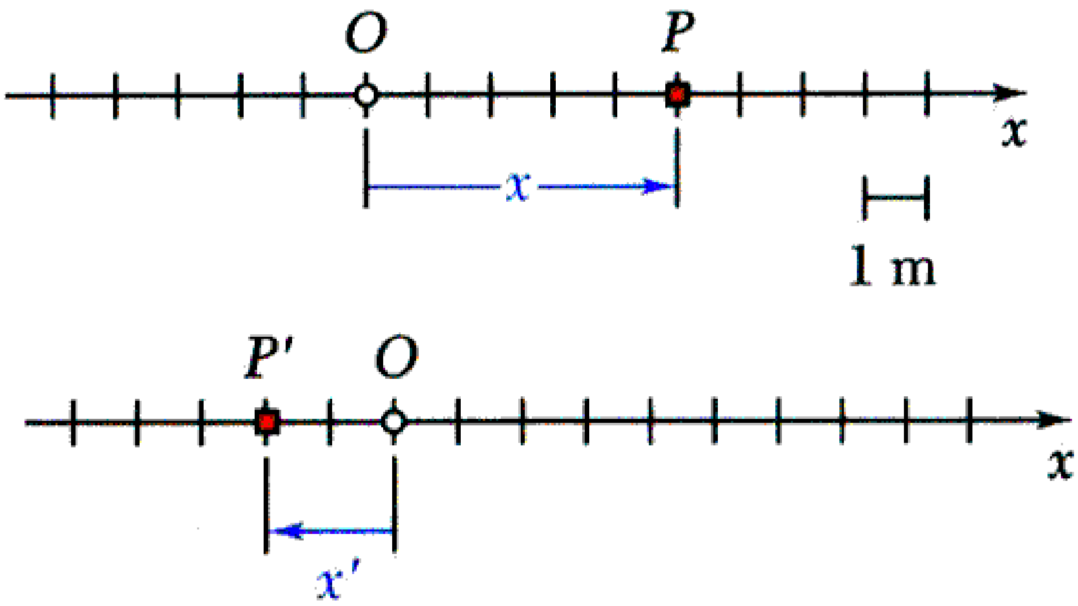
PELOTAS

Cinemática do Ponto Material

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- Diz-se que uma partícula que se move ao longo de uma linha reta está em *movimento retilíneo*.



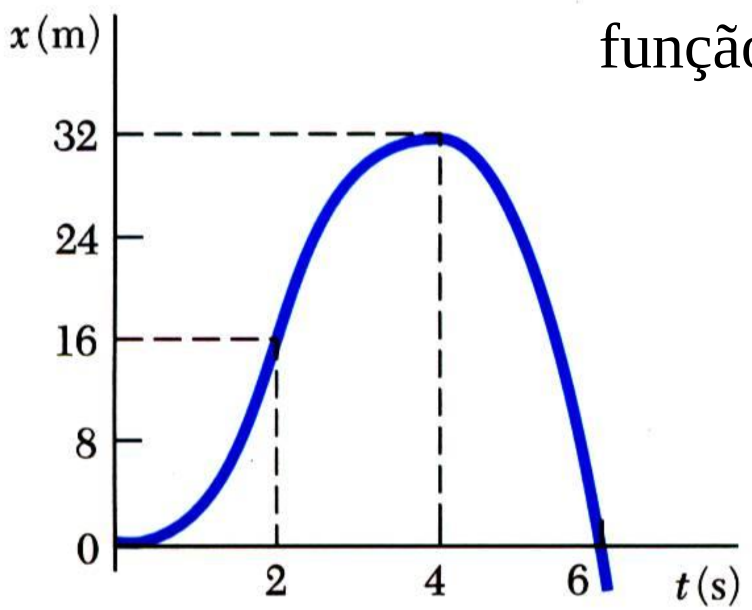
- A *coordenada de posição* de uma partícula é definida pela distância, positiva ou negativa, da partícula a uma origem fixa na linha em que ela se desloca.

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

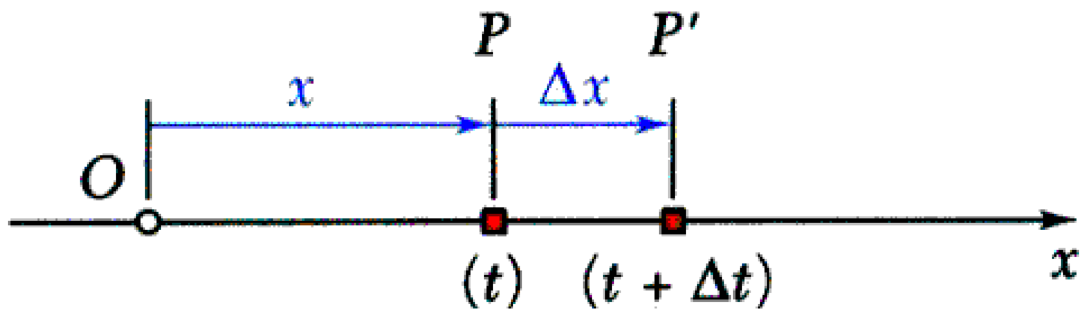
- O *movimento* de uma partícula é conhecido se a coordenada de posição da partícula é conhecida para cada instante do tempo t. O movimento da partícula pode ser expresso sob a forma de uma função, por exemplo,

$$x = 6t^2 - t^3$$

ou na forma de um gráfico de x em função de t.



Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração



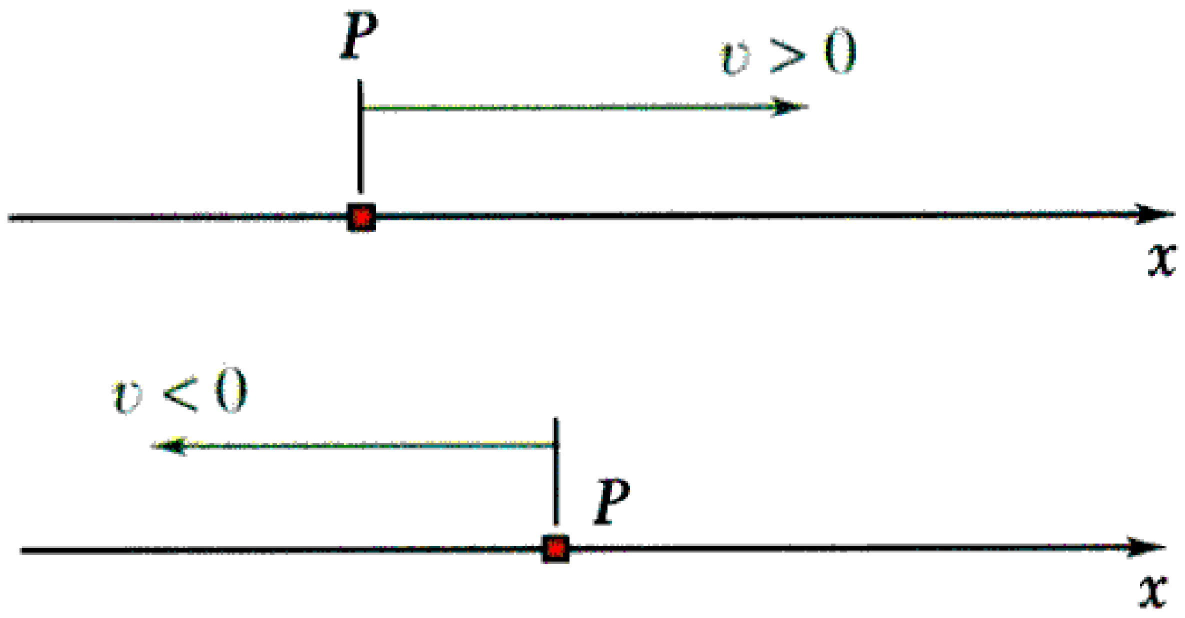
- Consideremos uma partícula que ocupa as posições *P*, no instante *t*, e *P'*, no instante $t+\Delta t$,

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$V_{inst} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- A Velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa. A intensidade da velocidade é conhecida como *velocidade escalar da partícula.*



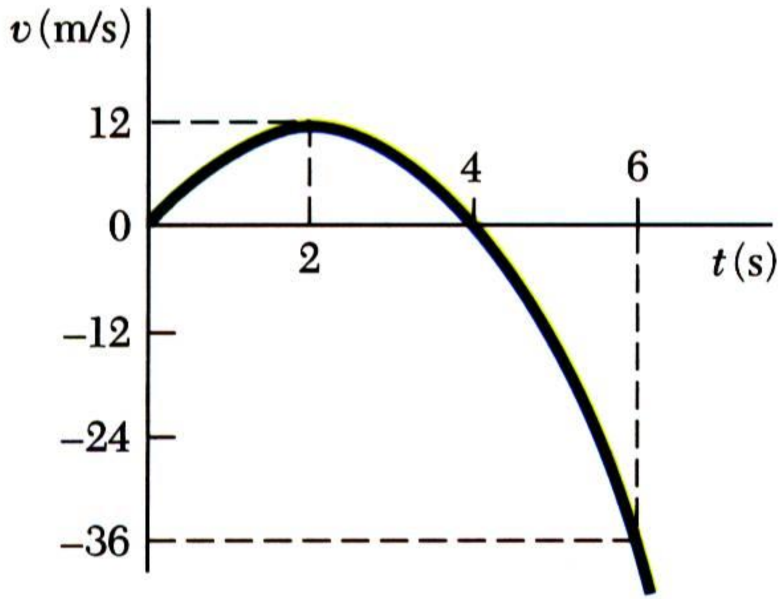
Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- Pela definição de derivada, $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

por exemplo,

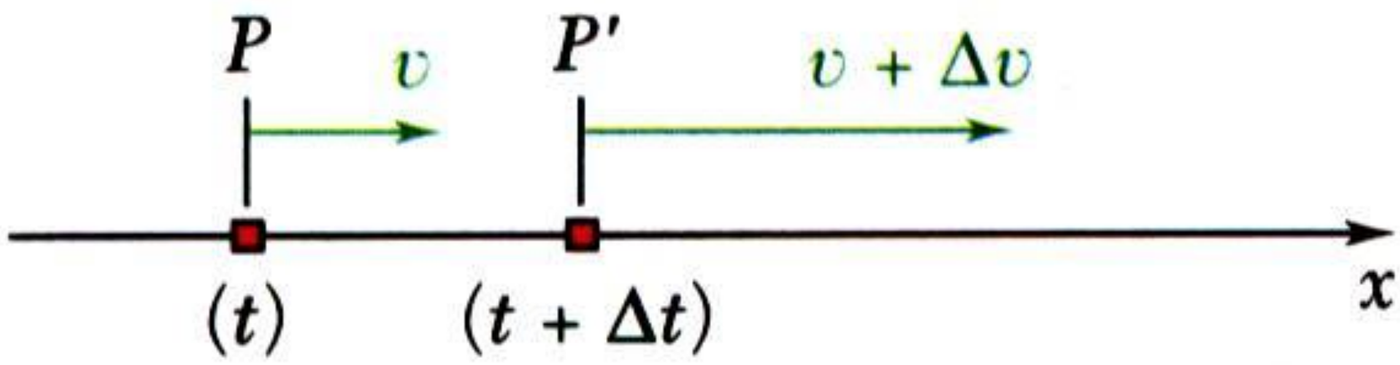
$$x = 6t^2 - t^3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$



Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

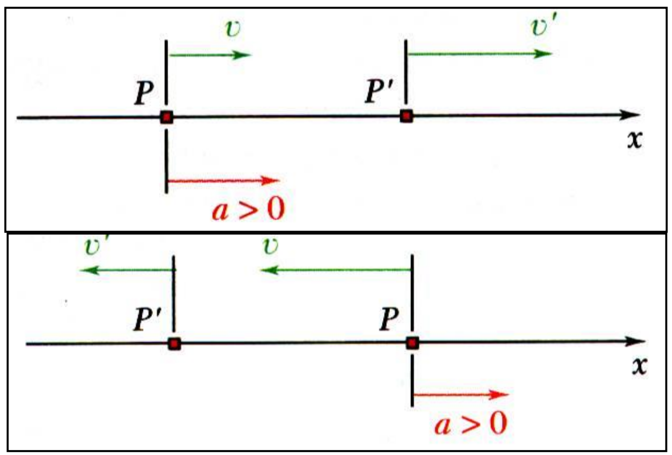
- Consideremos uma partícula com velocidade *v*, no instante *t*, e *v'*, no instante ***t+Δt***,



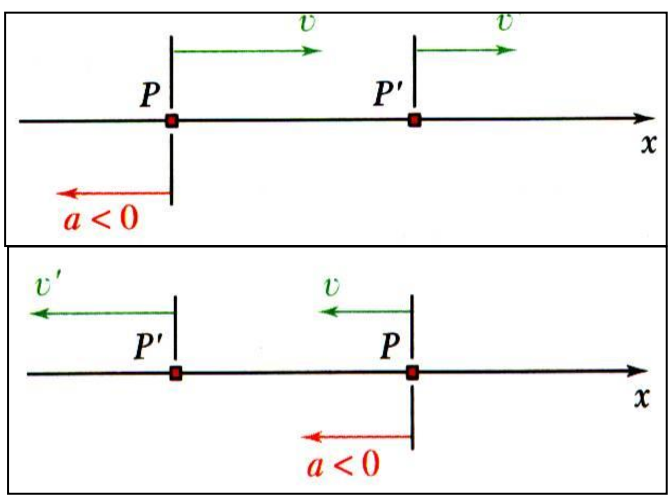
$$\textit{Aceleração instantânea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- A aceleração instantânea pode ser:



- positiva: correspondendo a um aumento em uma velocidade positiva ou a uma diminuição em uma velocidade negativa;



- negativa: correspondendo a uma diminuição em uma velocidade positiva ou a um aumento em uma velocidade negativa.

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

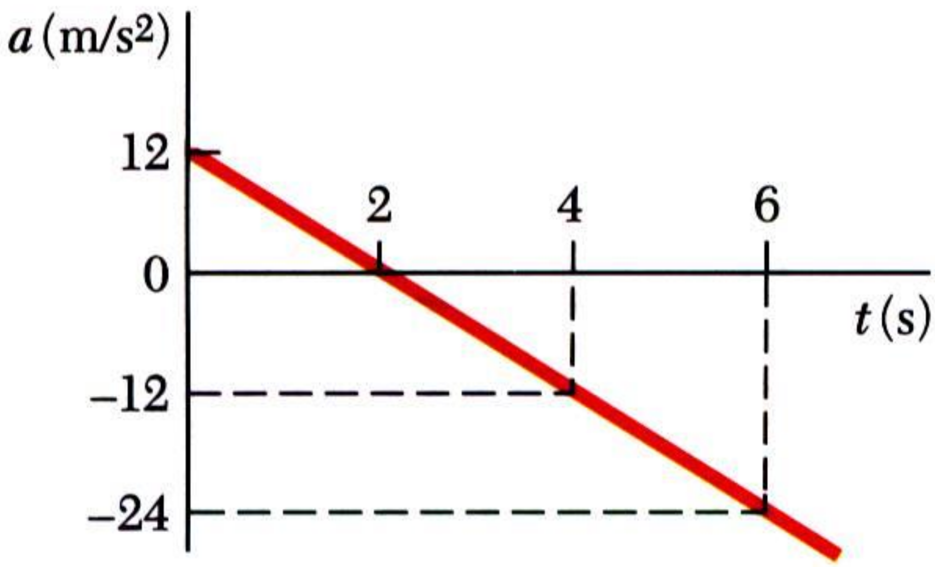
- A partir da definição de derivada: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

por exemplo:

$$x = 6t^2 - t^3$$

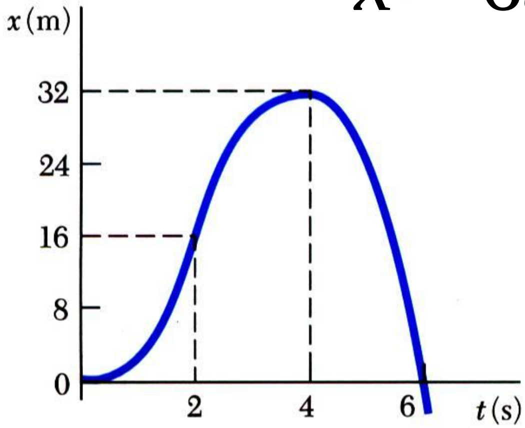
$$v = 12t - 3t^2$$

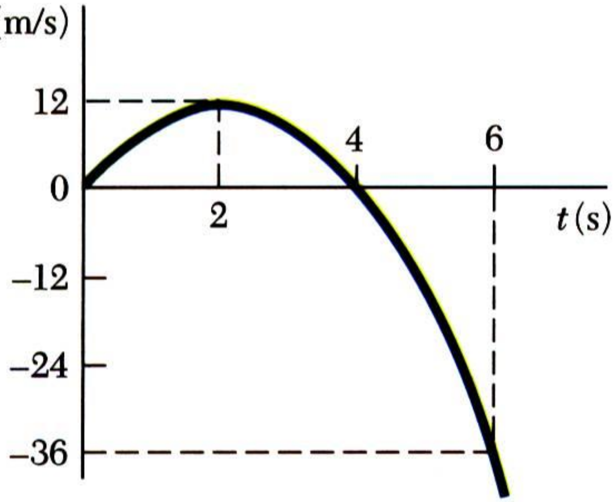
$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$



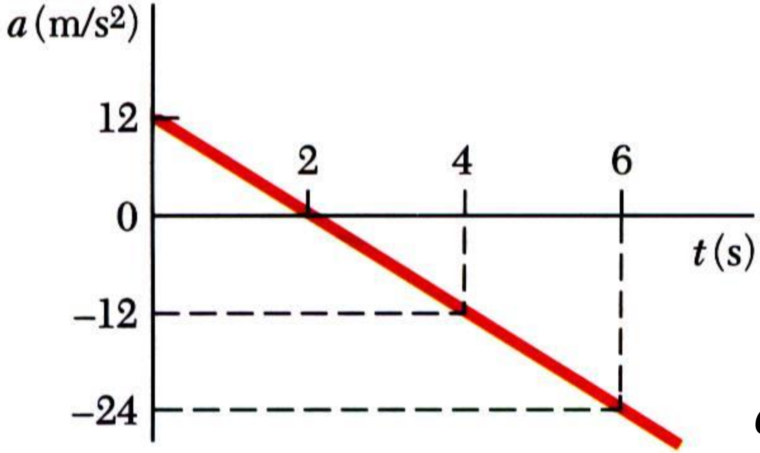
Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- Consideremos uma partícula cujo movimento é descrito pela equação: $$x = 6t^2 - t^3$$





$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

$$x = 6t^2 - t^3 \qquad v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2 \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

- quando $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$, $a = 12$ m/s^2
- quando $t = 2$ s, $x = 16$ m, $v = v_{máx} = 12$ m/s, $a = 0$
- quando $t = 4$ s, $x = x_{máx} = 32$ m, $v = 0$, $a = -12$ m/s^2
- quando $t = 6$ s, $x = 0$, $v = -36$ m/s, $a = -24$ m/s^2

Determinação do Movimento de uma Partícula

- Lembremos que o *movimento* de uma partícula é tido como conhecido se sua posição for conhecida para cada instante do tempo *t*.

- Mais frequentemente, as condições do movimento serão especificadas pelo tipo de aceleração que a partícula possui. Portanto, para determinar a velocidade e a posição é necessário efetuar duas integrações.

- Três classes comuns de movimento são aquelas em que:
  - a aceleração é uma dada função do *tempo*, $a = f(t)$
  - a aceleração é uma dada função da *posição*, $a = \mathrm{f}(x)$
  - aceleração é uma dada função da *velocidade*, $a = \mathrm{f}(v)$

Determinação do Movimento de uma Partícula

- a aceleração é uma dada função do *tempo*, $a = f(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = a = f(t) \qquad dv = f(t)\,dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$v(t) - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad dx = v(t)\,dt \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt$$

Determinação do Movimento de uma Partícula

- a aceleração é uma dada função da *posição*, a = f(x) :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{v} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad a = v\frac{dv}{dx} = f(x)$$

$$v\,dv = f(x)\,dx \qquad\qquad \int_{v_0}^{v(x)} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}v(x)^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Determinação do Movimento de uma Partícula

- a aceleração é uma dada função da velocidade, a = f(v):

$$\frac{dv}{dt} = a = f(v) \qquad \frac{dv}{f(v)} = dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = t$$

$$v\frac{dv}{dx} = a = f(v) \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

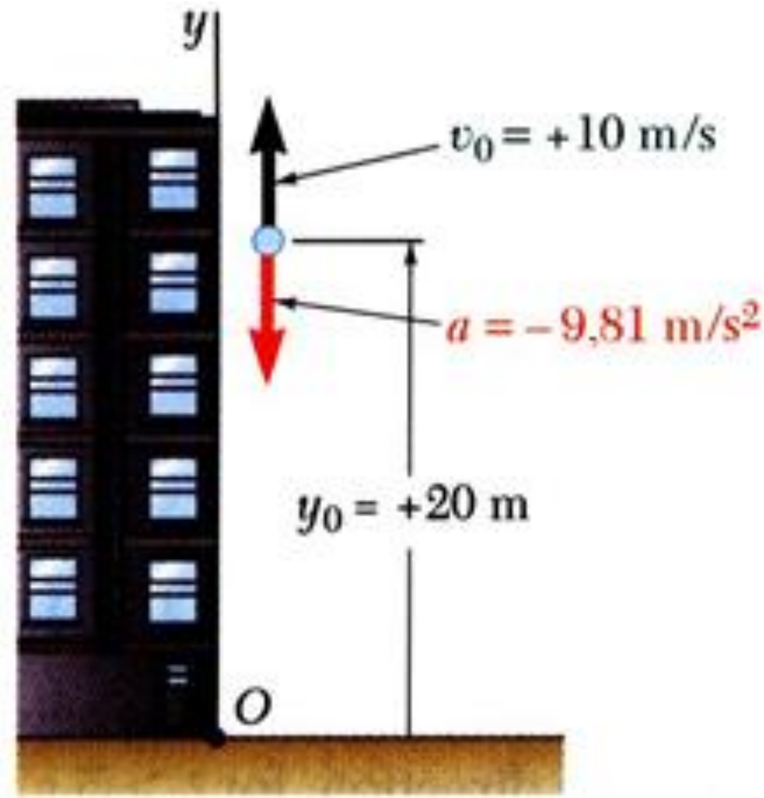
$$x(t) - x_0 = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

Exemplo 1

Uma bola é arremessada para cima com velocidade vertical de 10 m/s de uma janela localizada a 20 m acima do solo.

Determine:

a. a velocidade e a elevação da bola acima do solo para qualquer instante *t*,
b. a elevação máxima atingida pela bola e o correspondente valor de *t*, e
c. o instante em que a bola atingirá o solo e a velocidade correspondente.



Exemplo 1

SOLUÇÃO:

a. Integramos a aceleração duas vezes para encontrar $v(t)$ e $y(t)$.

b. Determinamos o valor de t para o qual a velocidade se iguala a zero (instante em que a elevação é máxima) e calculamos a altitude correspondente.

c. Determinamos o valor de t para o qual a elevação se iguala a zero (instante em que a bola atinge o solo) e calculamos a velocidade correspondente.

Exemplo 1

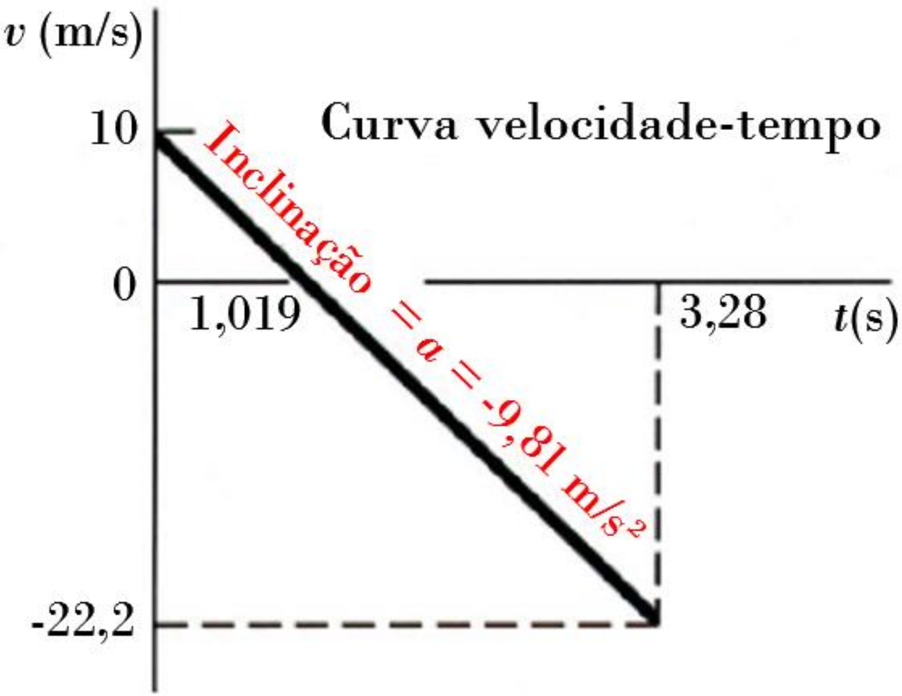
a. Integramos a aceleração duas vezes para encontrar $v(t)$ e $y(t)$.

$$\frac{dv}{dt} = a = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\int_0^t 9{,}81\,dt$$

$$v(t) - v_0 = -9{,}81t$$

$$\boxed{v(t) = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t}$$



Exemplo 1

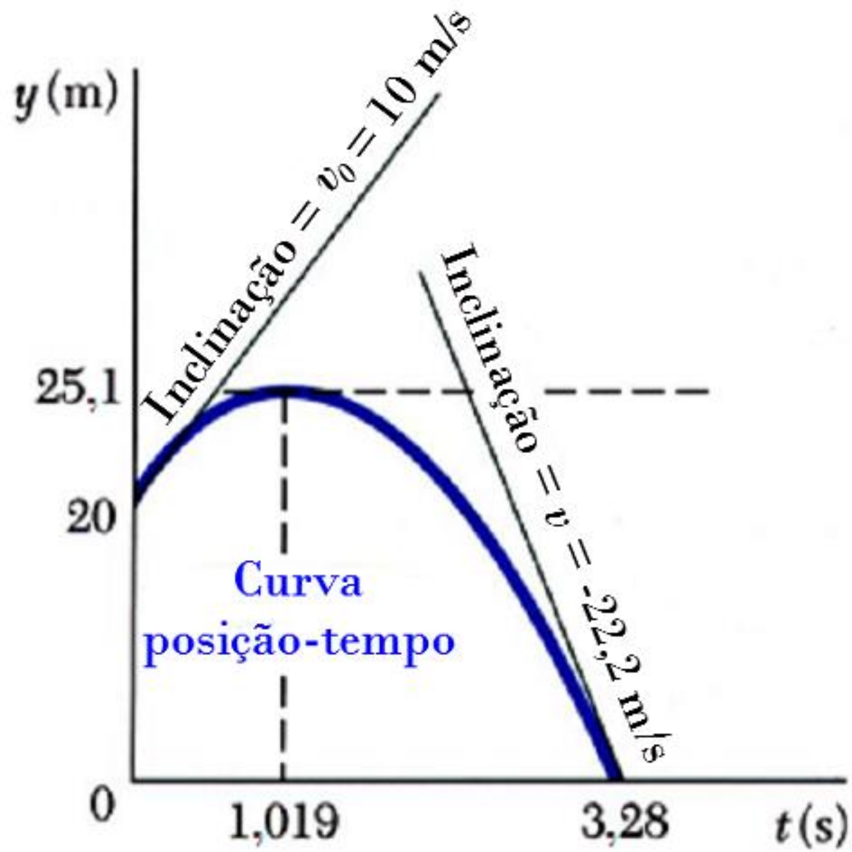
a. Integramos a aceleração duas vezes para encontrar $v(t)$ e $y(t)$.

$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9{,}81t$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t (10 - 9{,}81t)\,dt$$

$$y(t) - y_0 = 10t - \tfrac{1}{2}9{,}81t^2$$

$$\boxed{y(t) = 20\,\mathrm{m} + \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t - \left(4{,}905\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2}$$

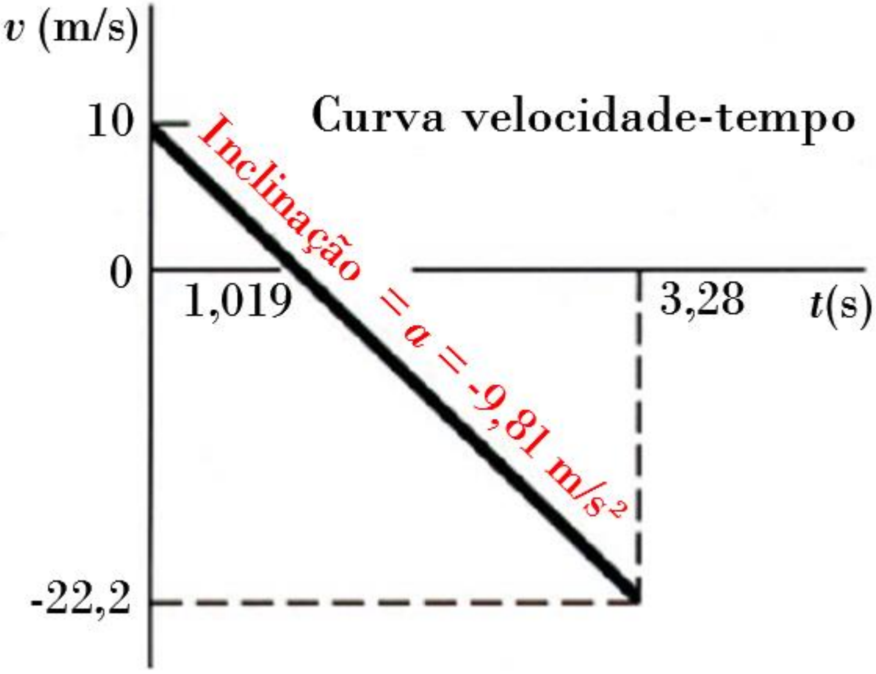


Exemplo 1

b. Determinamos o valor de *t* para o qual a velocidade se iguala a zero.

$$v(t) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t = 0$$

$$\boxed{t = 1{,}019\,\text{s}}$$

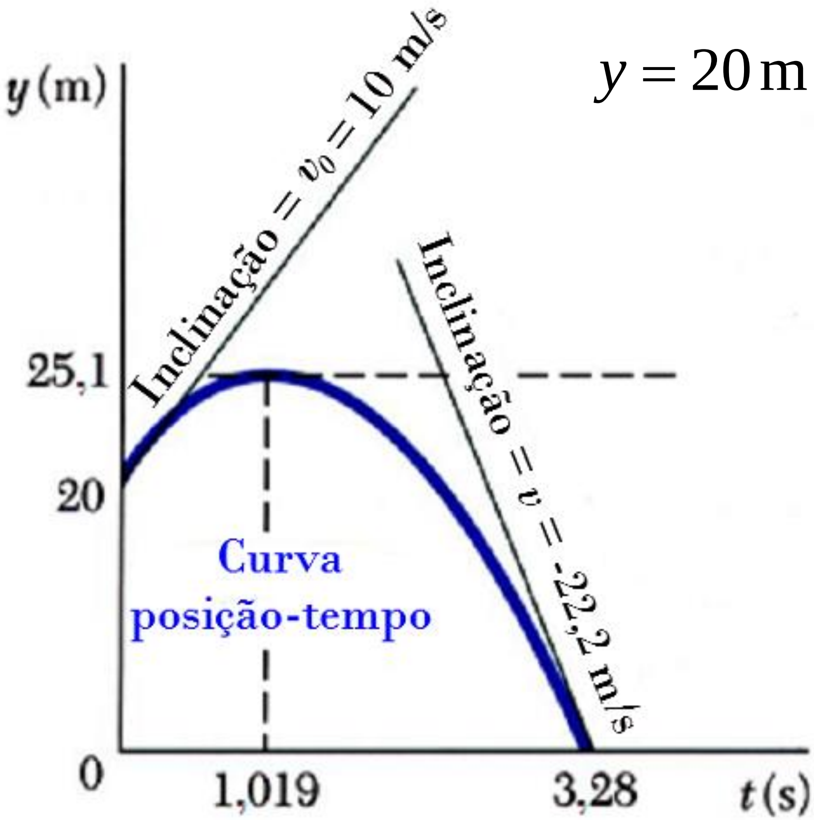


Exemplo 1

b. Calculamos a altitude correspondente.

$$y(t) = 20\,\mathrm{m} + \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t - \left(4{,}905\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2$$

$$y = 20\,\mathrm{m} + \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(1{,}019\,\mathrm{s}) - \left(4{,}905\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(1{,}019\,\mathrm{s})^2$$

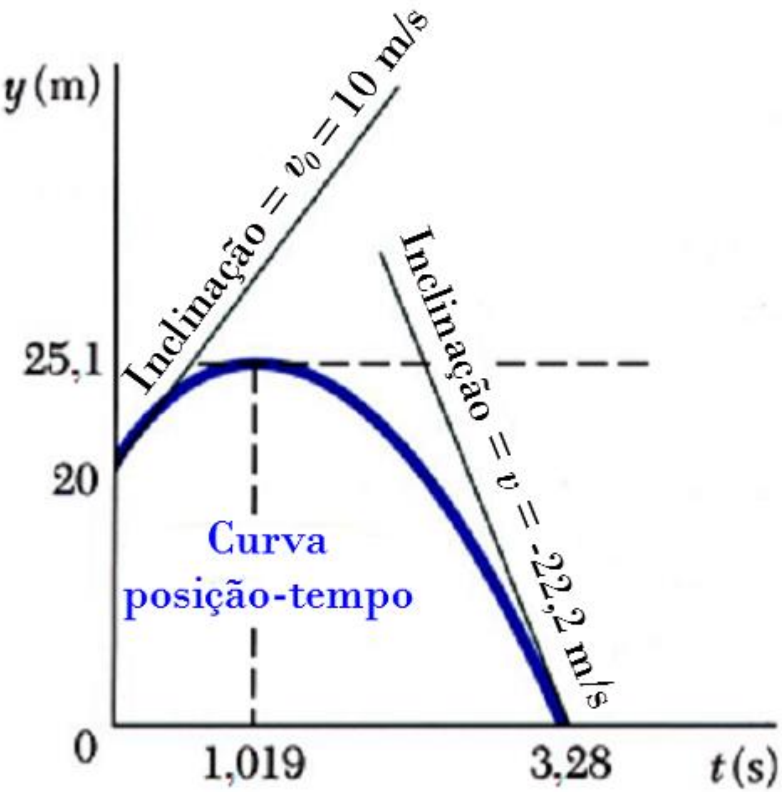


$$\boxed{y = 25{,}1\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 1

c. Determinamos o valor de *t* para o qual a elevação da partícula se iguala a zero e calculamos a velocidade correspondente.

$$y(t) = 20\,\mathrm{m} + \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t - \left(4{,}905\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2 = 0$$



$$\boxed{\begin{aligned} t &= -1{,}243\,\mathrm{s}\ \ (\text{não se aplica}) \\ t &= 3{,}28\,\mathrm{s} \end{aligned}}$$

Exemplo 1

c. Determinamos o valor de *t* para o qual a elevação da partícula se iguala a zero e calculamos a velocidade correspondente.

$$t = 3,28\,\mathrm{s}$$

$$v(t) = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t$$

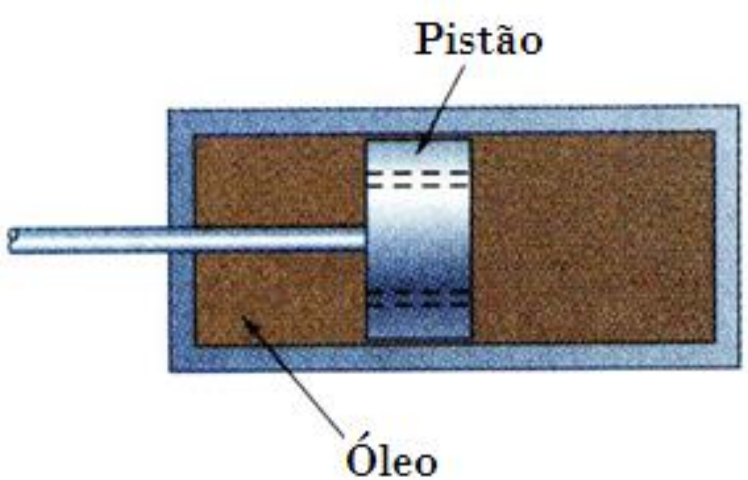
$$v(3,28\,\mathrm{s}) = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3,28\,\mathrm{s})$$

$$\boxed{v = -22,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Exemplo 2

O mecanismo de freio usado para reduzir o recuo em certos tipos de arma consiste em um pistão preso ao cano e que se move em um cilindro fixo, cheio de óleo. Quando o cano recua com velocidade inicial v_0, o pistão se move e o óleo é forçado através de orifícios em seu interior, causando uma desaceleração do pistão e do cano a uma taxa proporcional à velocidade de ambos.

Determine $v(t)$, $x(t)$, e $v(x)$.



$$a = -kv$$

Exemplo 2

SOLUÇÃO:

- Integramos $a = dv/dt = -kv$ para encontrar $v(t)$.
- Integramos $v(t) = dx/dt$ para encontrar $x(t)$.
- Integramos $a = v\ dv/dx = -kv$ para encontrar $v(x)$.

Exemplo 2

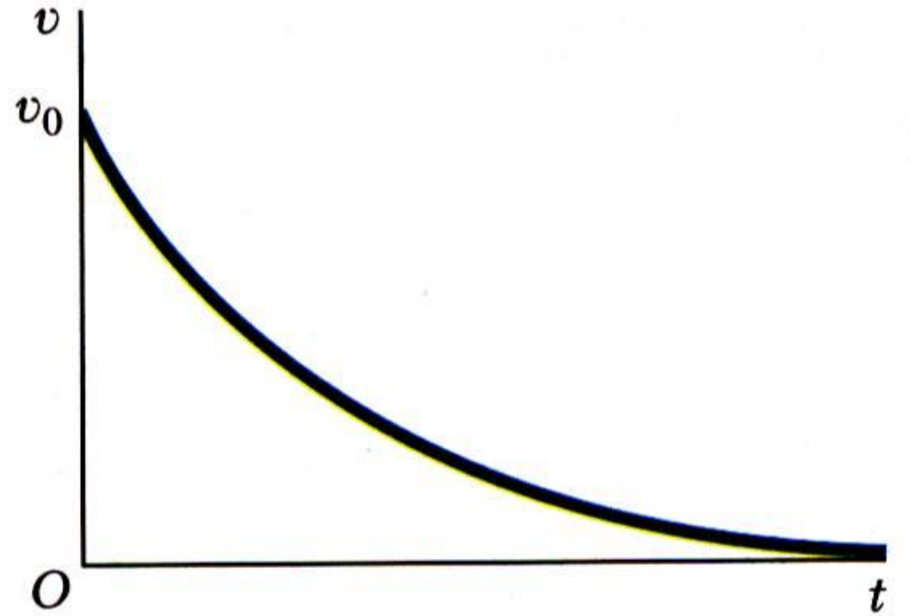
- Integramos $a = dv/dt = -kv$ para encontrar $v(t)$.

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v(t)}{v_0} = -kt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$



Exemplo 2

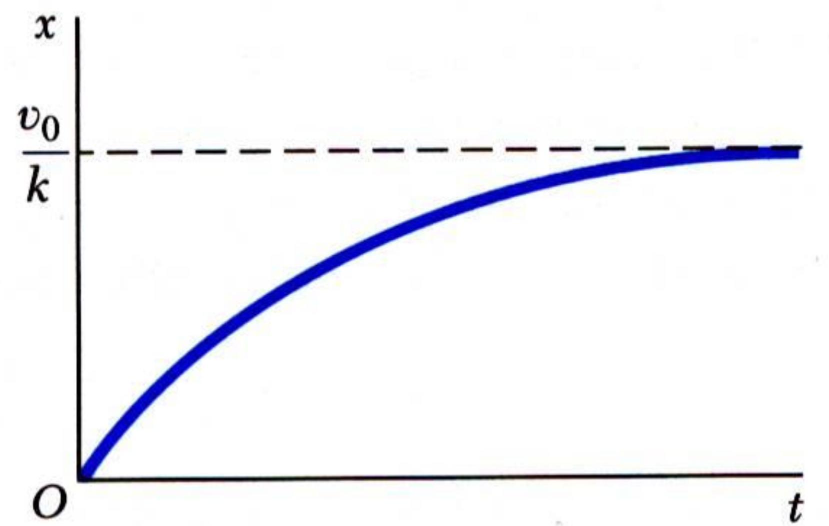
- Integramos $v(t) = dx/dt$ para encontrar $x(t)$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

$$\int_0^{x(t)} dx = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

$$x(t) = v_0 \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \right]_0^t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$



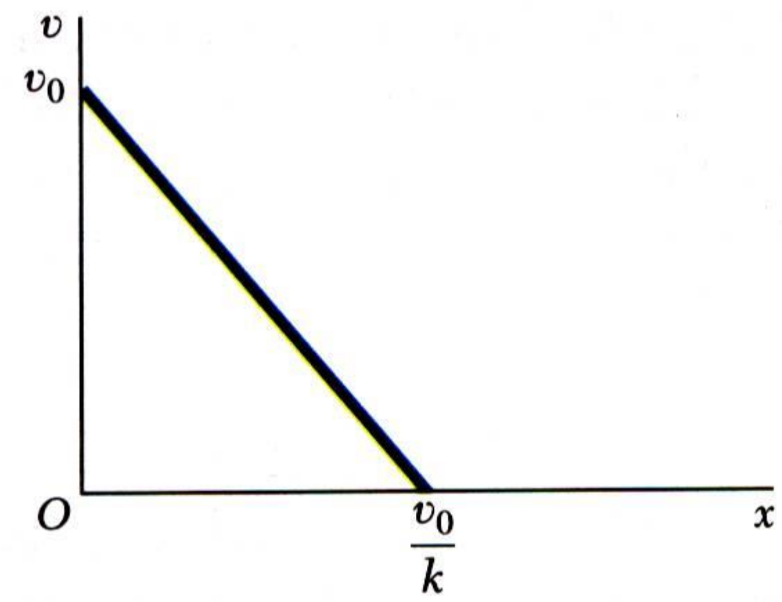
Exemplo 2

- Integramos $a = v\,dv/dx = -kv$ para encontrar $v(x)$.

$$a = v\frac{dv}{dx} = -kv \qquad dv = -k\,dx \qquad \int_{v_0}^{v} dv = -k\int_{0}^{x} dx$$

$$v - v_0 = -kx$$

$$\boxed{v = v_0 - kx}$$



Movimento Retilíneo Uniforme

- Para uma partícula em movimento retilíneo uniforme, a aceleração é zero e a velocidade é constante.

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado

- Para uma partícula em movimento retilíneo uniformemente acelerado, a aceleração é constante.

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \qquad v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)dt \qquad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado

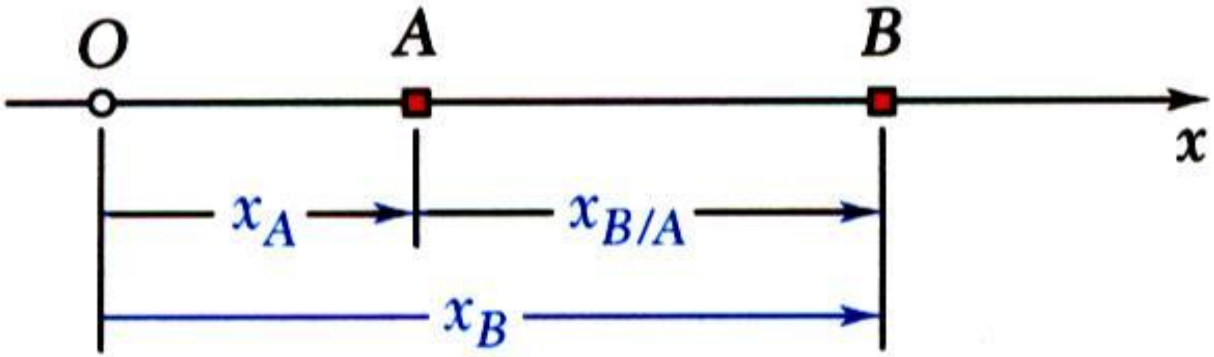
- Para uma partícula em movimento retilíneo uniformemente acelerado, a aceleração é constante.

$$v\frac{dv}{dx} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_{x_0}^{x} dx \qquad \tfrac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = a\left(x - x_0\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Movimento de Muitas Partículas

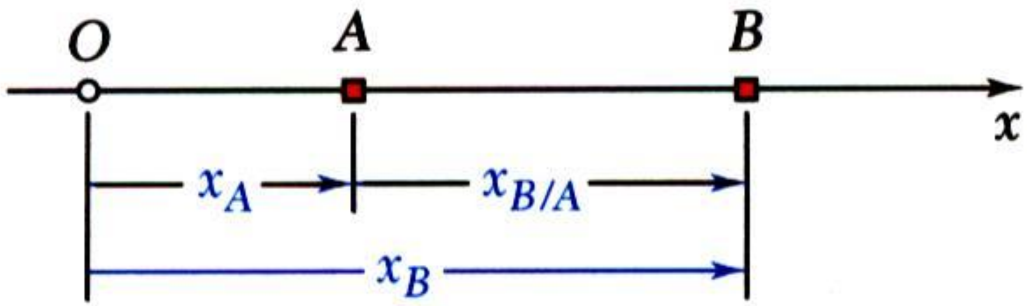
- Para partículas que se movem ao longo da mesma linha, o tempo deve ser contado a partir do mesmo instante inicial e os deslocamentos devem ser medidos em relação à mesma origem e no mesmo sentido.



$$x_{B/A} = x_B - x_A =$$ coordenada de posição relativa de *B* em relação a *A*

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

Movimento de Muitas Partículas



$v_{B/A} = v_B - v_A =$ velocidade relativa de *B* em relação a *A*

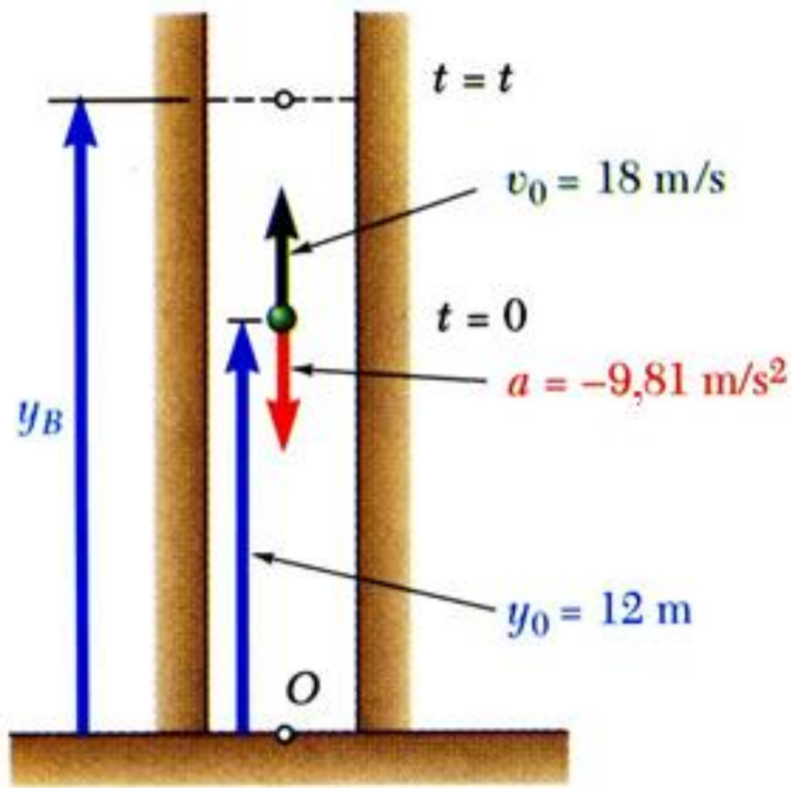
$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$a_{B/A} = a_B - a_A =$ aceleração relativa de *B* em relação a *A*

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

Exemplo 3

Uma bola é arremessada verticalmente para cima de uma altura de 12 m de um poço de elevador com velocidade inicial de 18 m/s. No mesmo instante, um elevador de plataforma aberta passa pelo nível de 5 m, subindo com velocidade de 2 m/s. Determine *(a)* quando e onde a bola atinge o elevador e *(b)* a velocidade relativa da bola em relação ao elevador quando a bola o atinge.



Exemplo 3

SOLUÇÃO:

- Substituímos a posição e a velocidade iniciais e a aceleração constante nas equações gerais para o movimento retilíneo uniformemente acelerado.

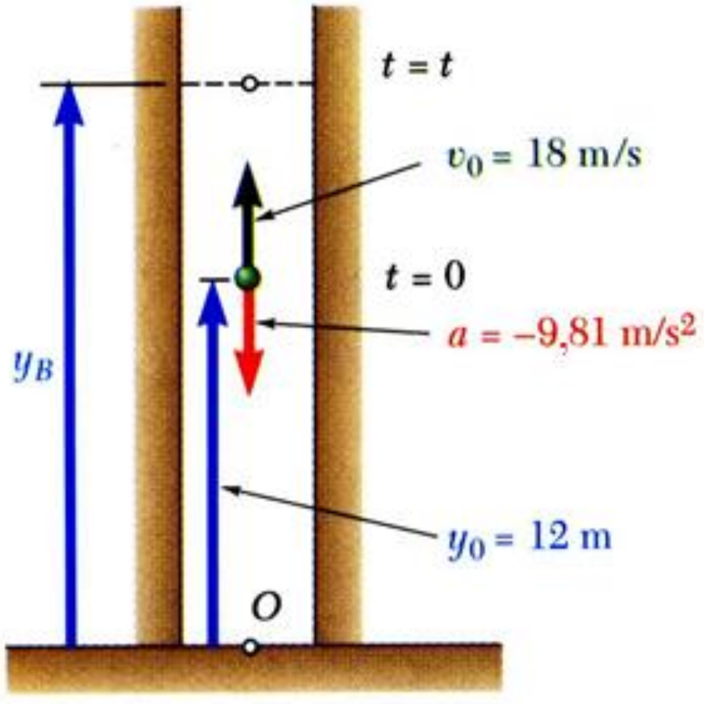
- Substituímos a posição inicial e a velocidade do elevador na equação para o movimento retilíneo uniforme.

- Escrevemos equações para a posição relativa da bola em relação ao elevador e resolvemos para a posição relativa zero, ou seja, para a posição em que ambos se chocam.

- Substituímos o valor do instante de tempo do impacto nas equações para a posição do elevador e para velocidade relativa da bola em relação ao elevador.

Exemplo 3

a. Substituímos a posição e a velocidade iniciais e a aceleração constante nas equações gerais para o movimento retilíneo uniformemente acelerado.

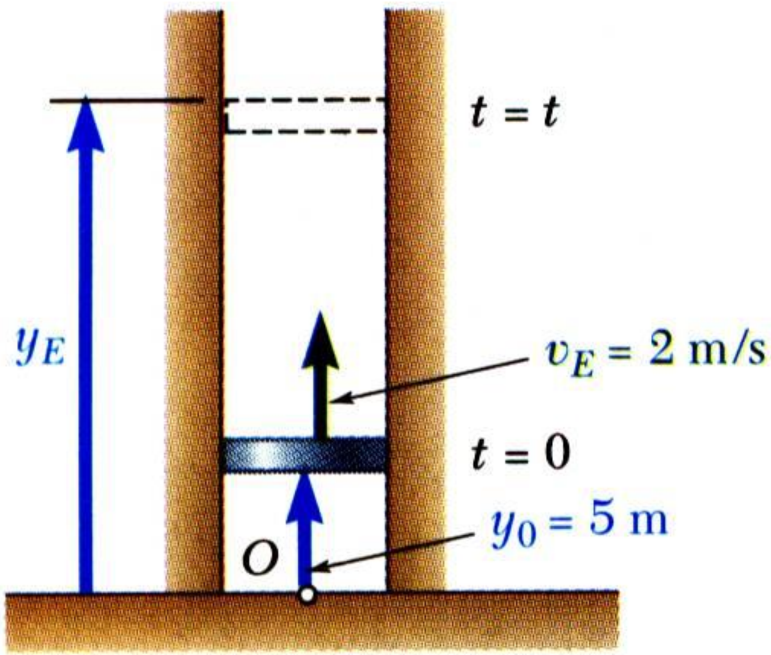


$$v_B = v_0 + at = 18\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t$$

$$y_B = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = 12\,\text{m} + \left(18\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(4{,}905\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$$

Exemplo 3

Substituímos a posição inicial e a velocidade do elevador na equação para o movimento retilíneo uniforme.

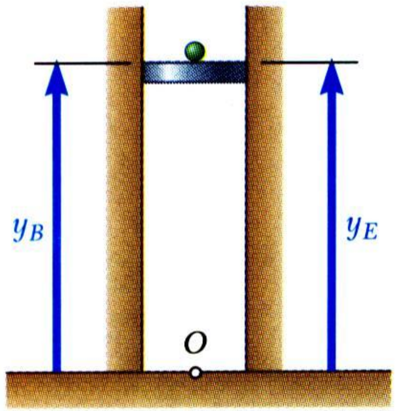


$$v_E = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_E = y_0 + v_E t = 5\,\text{m} + \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t$$

Exemplo 3

Escrevemos equações para a posição relativa da bola em relação ao elevador e resolvemos para a posição relativa zero, ou seja, para a posição em que ambos se chocam.



$$y_{B/E} = \left(12 + 18t - 4{,}905t^2\right) - \left(5 + 2t\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= -0{,}39\,\mathrm{s} \;\; (\text{não se aplica}) \\ t &= 3{,}65\,\mathrm{s} \end{aligned}}$$

Substituímos o valor do instante de tempo do impacto nas equações para a posição do elevador e para velocidade relativa da bola em relação ao elevador.

$$y_E = 5 + 2(3{,}65)$$

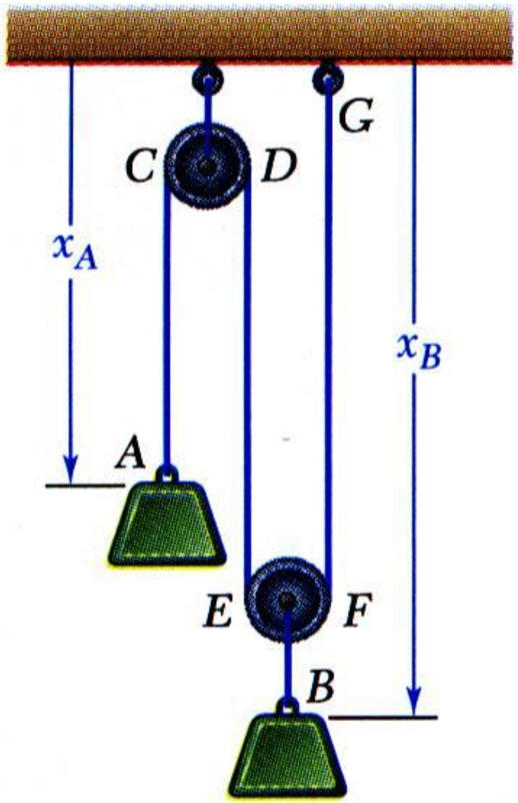
$$\boxed{y_E = 12.3\,\mathrm{m}}$$

b. $$v_{B/E} = \left(18 - 9{,}81t\right) - 2$$
$$= 16 - 9{,}81\;(3{,}65)$$

$$\boxed{v_{B/E} = -19{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Movimento de Muitas Partículas: Movimento Dependente

- A posição de uma partícula pode *depender* da posição de outra partícula ou de várias outras partículas.



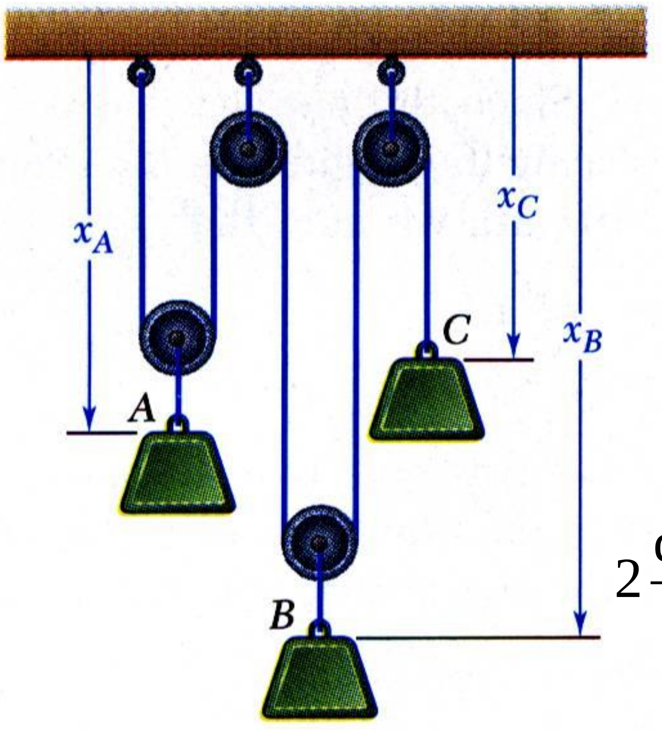
- Na figura ao lado, a posição do bloco *B* depende da posição do bloco *A*. Como a corda tem comprimento constante, tem-se que a soma dos comprimentos dos seus segmentos é constante.

$$x_A + 2x_B = \text{constante (um grau de liberdade)}$$

Movimento de Muitas Partículas: Movimento Dependente

- As posições dos três blocos ao lado são dependentes.

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante (dois graus de liberdade)}$$



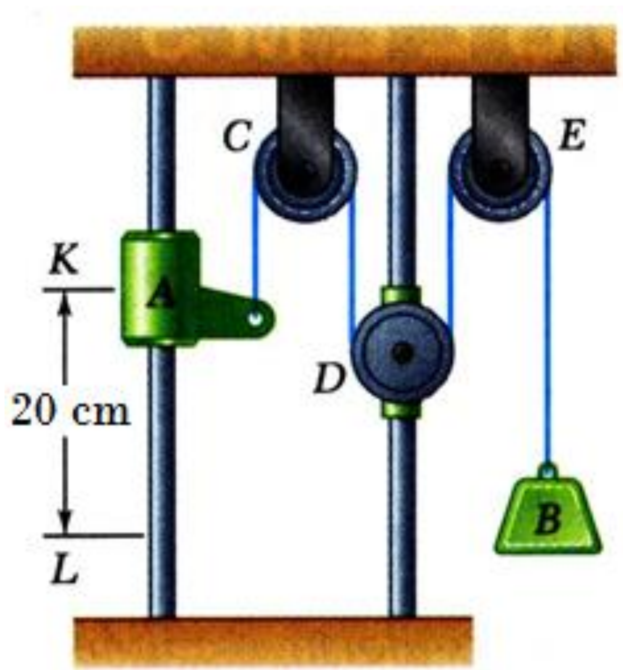
- Para partículas cujas posições estão relacionadas linearmente, uma relação semelhante é válida entre as velocidades e as acelerações das partículas.

$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \quad ou \quad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad ou \quad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

Exemplo 4

A polia *D* está presa a um cursor que que é puxado para baixo com velocidade de 7,5 cm/s. No instante t = 0, o cursor *A* começa a se mover para baixo a partir de *K* com aceleração constante e velocidade inicial nula. Sabendo que a velocidade do cursor *A* é de 30 cm/s ao passar pelo ponto *L*, determine a variação na elevação, a velocidade e a aceleração do bloco *B* quando o bloco *A* passar por *L*.



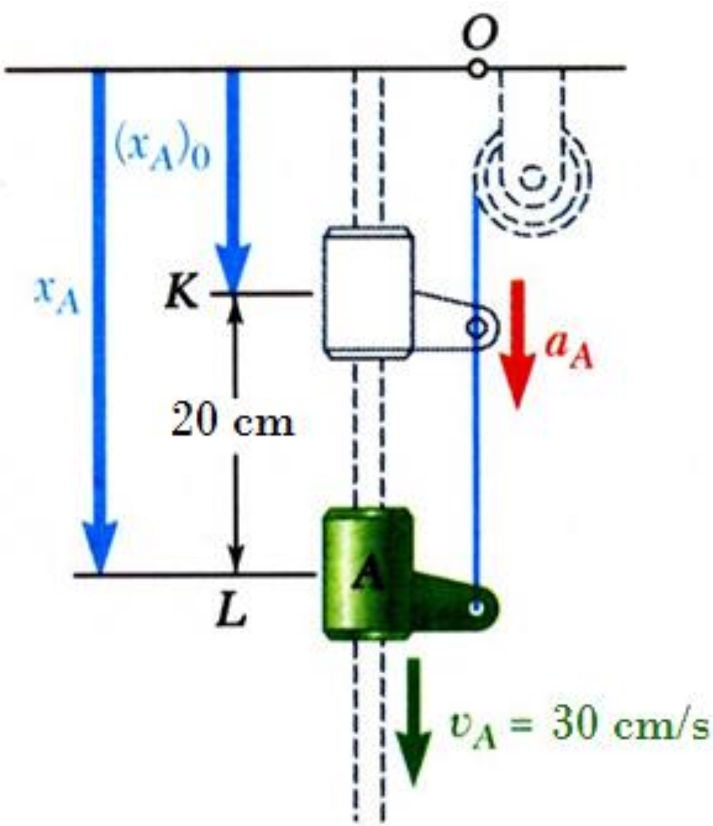
Exemplo 4

SOLUÇÃO:

- Colocamos a origem na superfície horizontal superior e escolhemos o sentido positivo para baixo.
- O cursor *A* tem movimento retilíneo uniformemente acelerado. Calculamos sua aceleração e o tempo *t* para que passe por *L*.
- A polia *D* tem movimento retilíneo uniforme. Calculamos a variação da posição no tempo *t*.
- O movimento do bloco *B* é dependente dos movimentos do cursor *A* e da polia *D*. Escrevemos relações entre os movimentos e as resolvemos para obter a variação na elevação do bloco *B*.
- Derivamos a relação de movimento duas vezes para obter equações para a velocidade e para a aceleração do bloco *B*.

Exemplo 4

- Colocamos a origem na superfície horizontal superior e escolhemos o sentido positivo para baixo.



- O cursor A tem movimento retilíneo uniformemente acelerado. Calculamos sua aceleração e o tempo t para que passe por L.

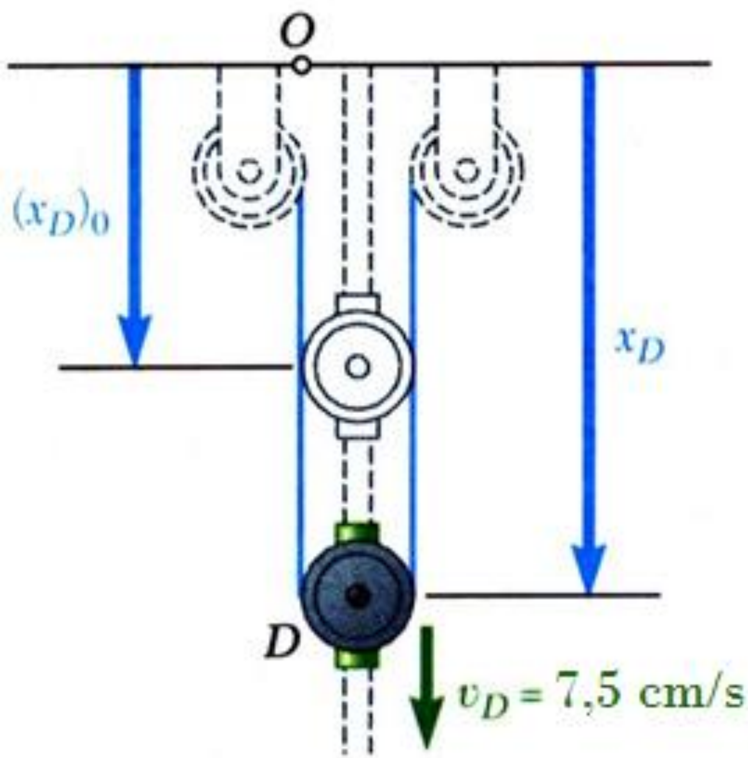
$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A\left[x_A - (x_A)_0\right]$$

$$\left(30\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)^2 = 2a_A(20\,\text{cm}) \qquad a_A = 22{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t$$

$$30\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 22{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\,t \qquad t = 1{,}333\,\text{s}$$

Exemplo 4



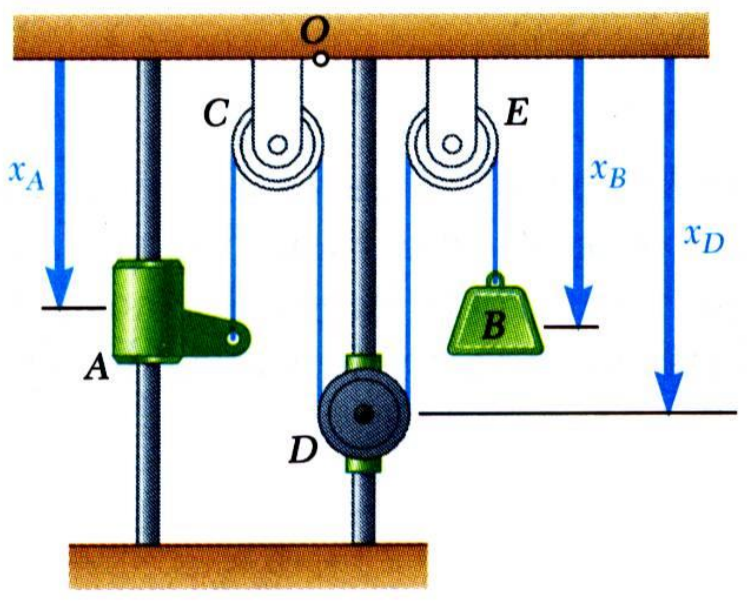
- A polia *D* tem movimento retilíneo uniforme. Calculamos a variação da posição no tempo *t*.

$$x_D = (x_D)_0 + v_D t$$

$$x_D - (x_D)_0 = \left(7{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)(1{,}333\,\text{s}) = 10\,\text{cm}$$

Exemplo 4

- O movimento do bloco *B* é dependente dos movimentos do cursor *A* e da polia *D*. Escrevemos relações entre os movimentos e as resolvemos para obter a variação na elevação do bloco *B*.



O comprimento total do cabo permanece constante, logo,

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0$$

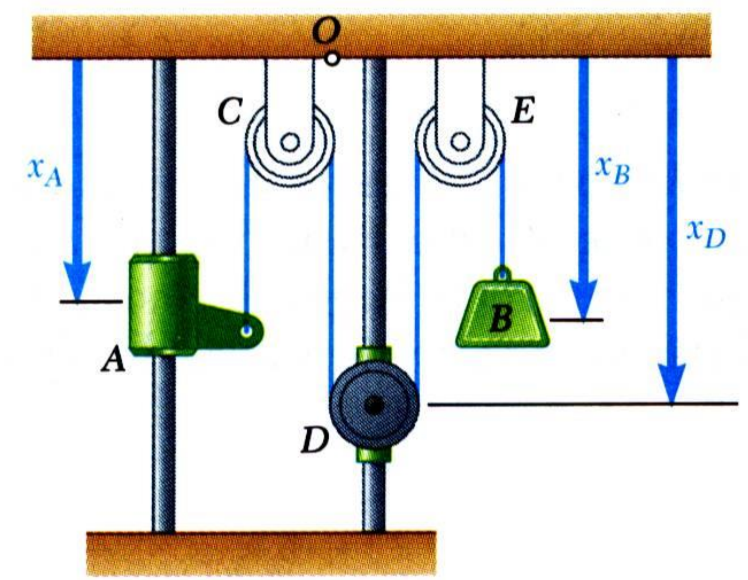
$$\left[x_A - (x_A)_0\right] + 2\left[x_D - (x_D)_0\right] + \left[x_B - (x_B)_0\right] = 0$$

$$(20\,\text{cm}) + 2(10\,\text{cm}) + \left[x_B - (x_B)_0\right] = 0$$

$$\boxed{x_B - (x_B)_0 = -40\,\text{cm}}$$

Exemplo 4

- Derivamos a relação de movimento duas vezes para obter equações para a velocidade e para a aceleração do bloco *B*.



$$x_A + 2x_D + x_B = \text{constante}$$

$$v_A + 2v_D + v_B = 0$$

$$\left(30\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) + 2\left(3\,\frac{7{,}5}{\text{s}}\right) + v_B = 0$$

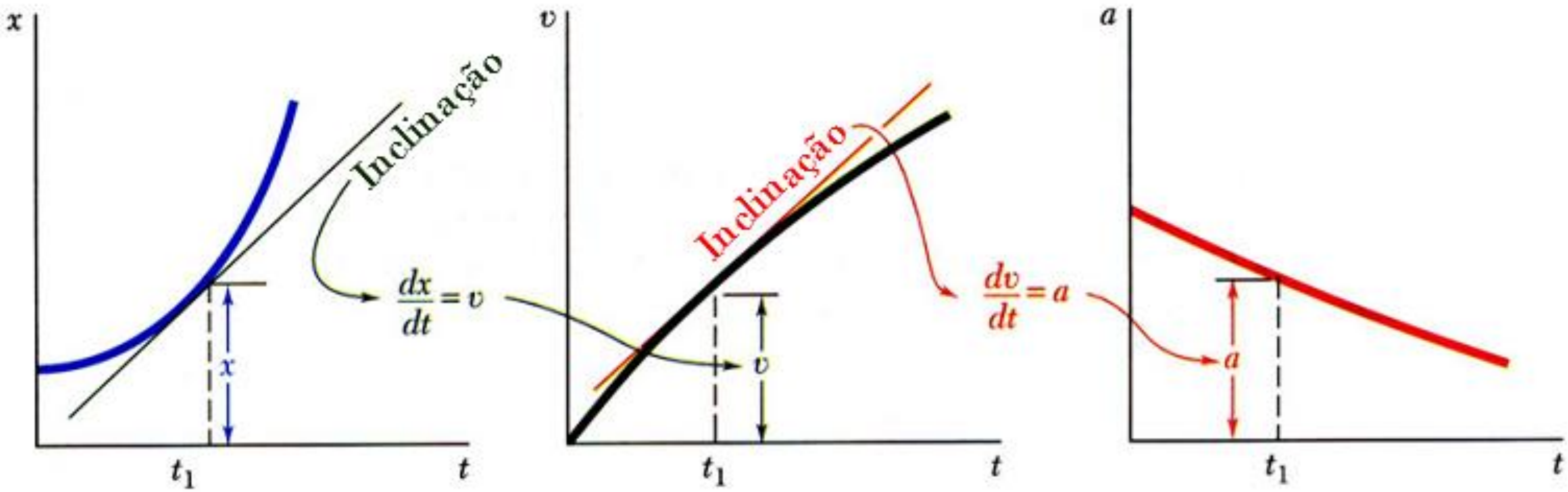
$$\boxed{v_B = -45\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

$$a_A + 2a_D + a_B = 0$$

$$\left(22{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right) + a_B = 0$$

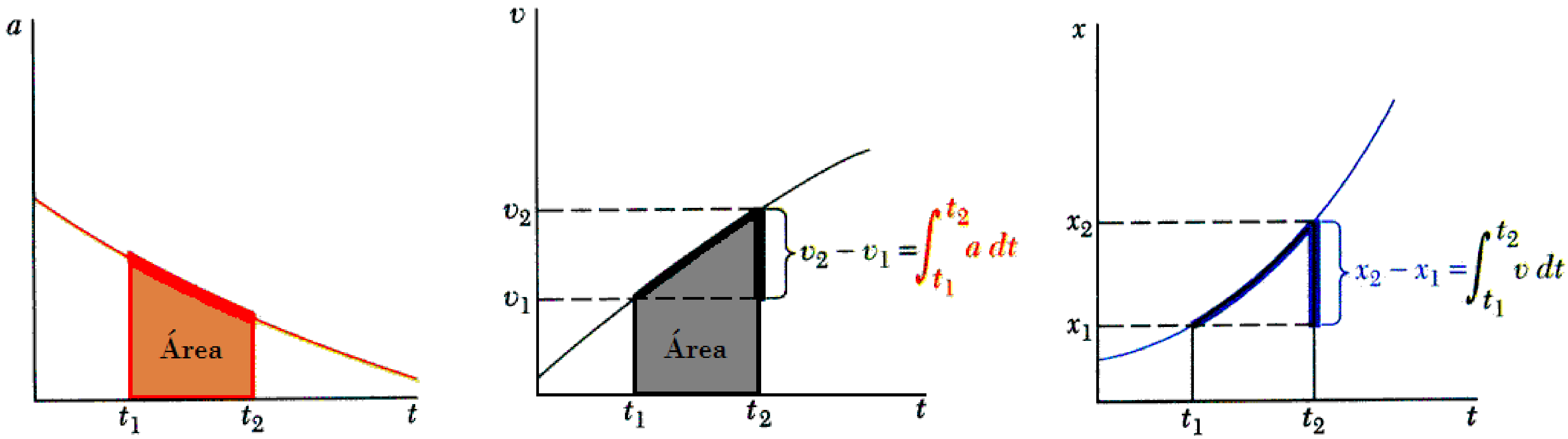
$$\boxed{a_B = -22{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}$$

Solução Gráfica de Problemas de Movimento Retilíneo



- Dada a curva *x*-*t*, a curva *v*-*t* é igual à sua inclinação.
- Dada a curva *v*-*t*, a curva *a*-*t* é igual à sua inclinação.

Solução Gráfica de Problemas de Movimento Retilíneo

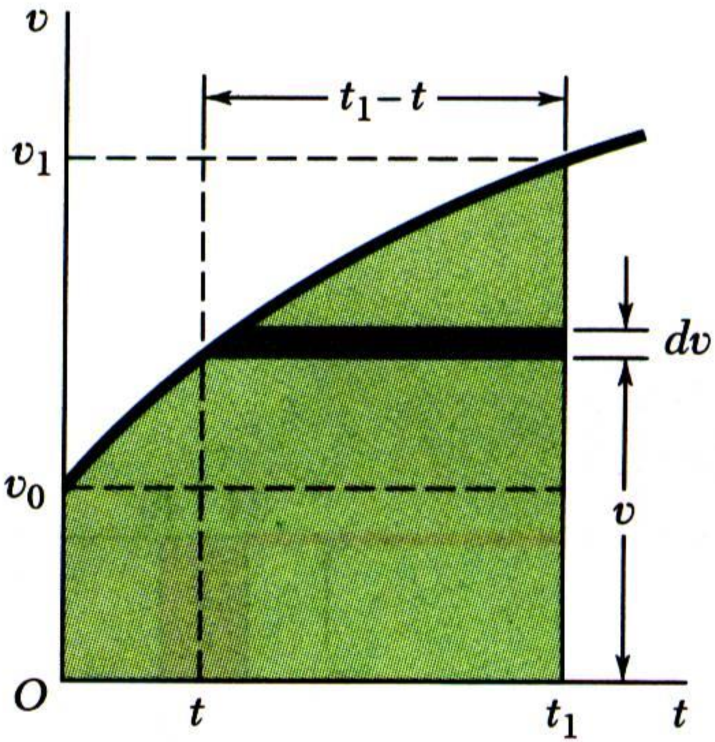


- A área medida sob a curva *a*-*t* de t_1 a t_2 é igual à variação da velocidade durante esse mesmo intervalo de tempo.

- A área medida sob a curva *v*-*t* de t_1 a t_2 é igual à variação da posição durante esse mesmo intervalo de tempo.

Outros Métodos Gráficos

- *O método do momento de área* é usado para se determinar a posição de um partícula em um instante *t* diretamente a partir da curva *a*-*t*.



$$x_1 - x_0 = \text{área sob a curva } v - t$$

$$= v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,dv$$

utilizando $dv = a\,dt$,

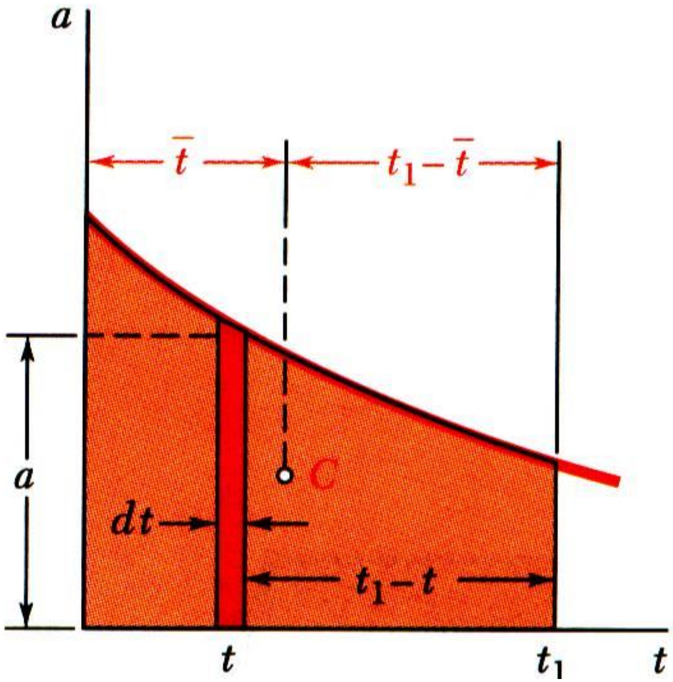
$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,a\,dt$$

Outros Métodos Gráficos

$$\int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\, a\, dt =$$ primeiro momento da área sob a curva *a*-*t* em relação à linha $t = t_1$.

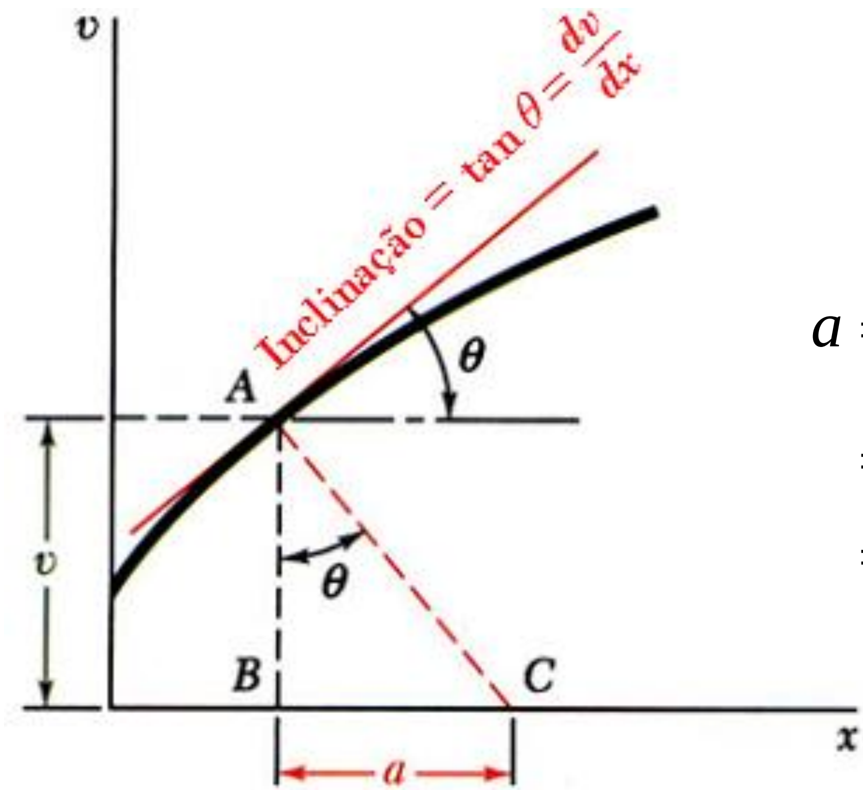
$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t})$$

$$\bar{t} = \text{abscissa do centróide } C$$



Outros Métodos Gráficos

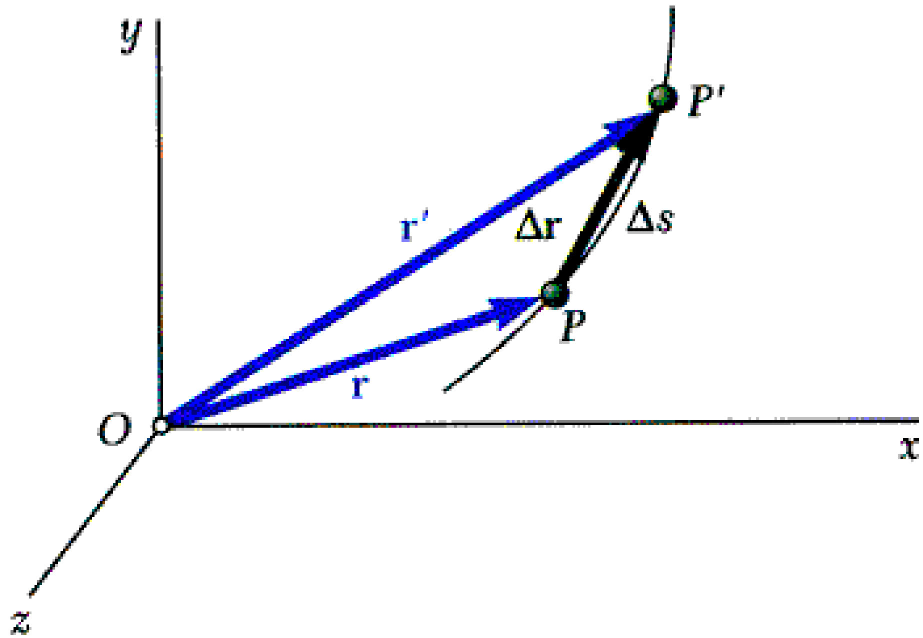
- Método para determinar a aceleração da partícula a partir da curva *v*-*x*:



$$a = v\frac{dv}{dx}$$
$$= AB\tan\theta$$
$$= BC = \textit{Subnormal} \text{ à curva } v\text{-}x$$

Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

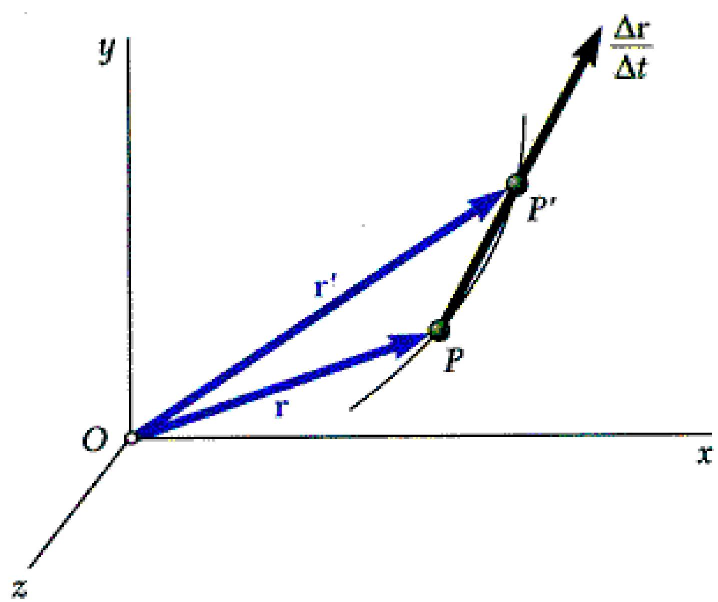
- Uma partícula que se desloca ao longo de uma curva que não é uma linha reta está em *movimento curvilíneo*.

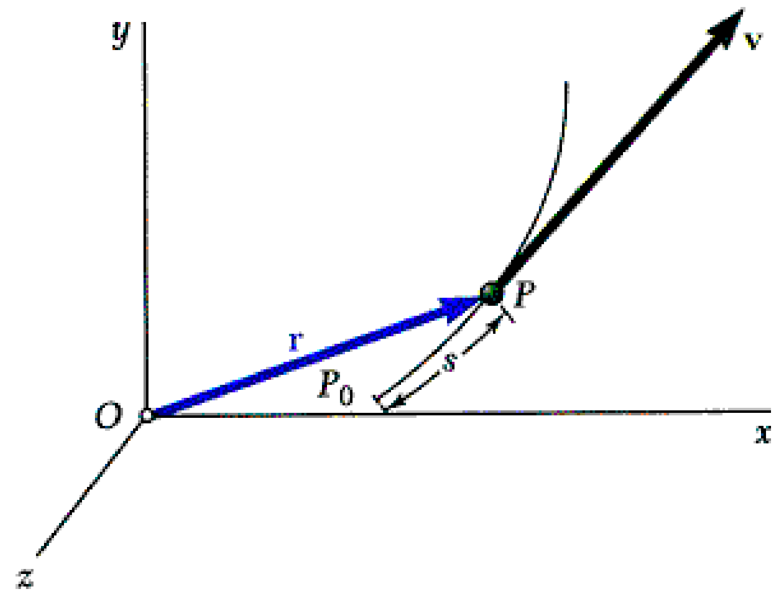


- O *vetor de posição* de uma partícula em um dado instante *t* é definido como um vetor que une a origem *O* de um sistema de referência fixo à posição ocupada pela partícula.

Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- Consideremos uma partícula que ocupa uma posição *P* definida por $\vec{r}$ no instante de tempo *t* e uma posição *P'* definida por $\vec{r}$ no instante t $t + \Delta t$. Para essa partícula temos,



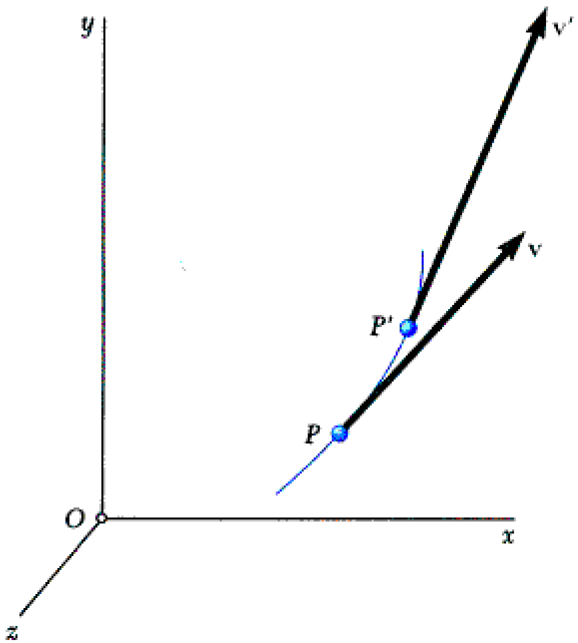


$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow velocidade\ ins\,\mathrm{t}.(vetor)$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow velocidade\ escalar$$

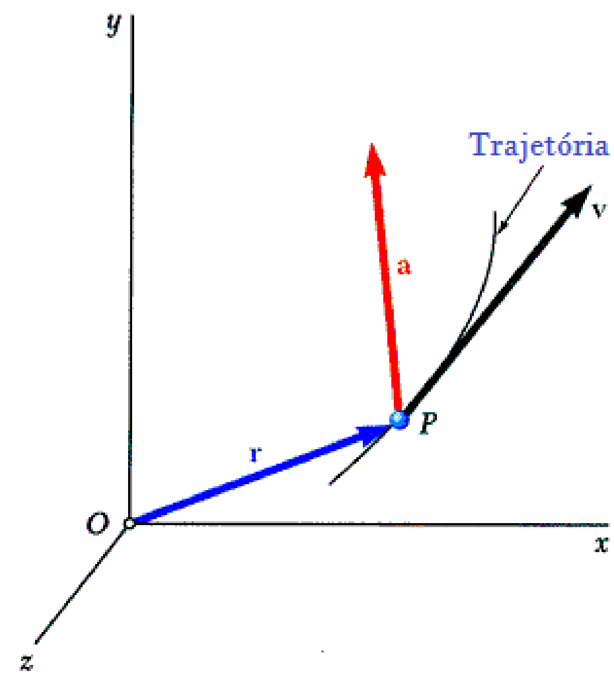
Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

- Consideremos uma partícula com velocidade $\vec{V}$ no instante t e velocidade $\vec{V}'$ no instante $t + \Delta t$. Para essa partícula temos,



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

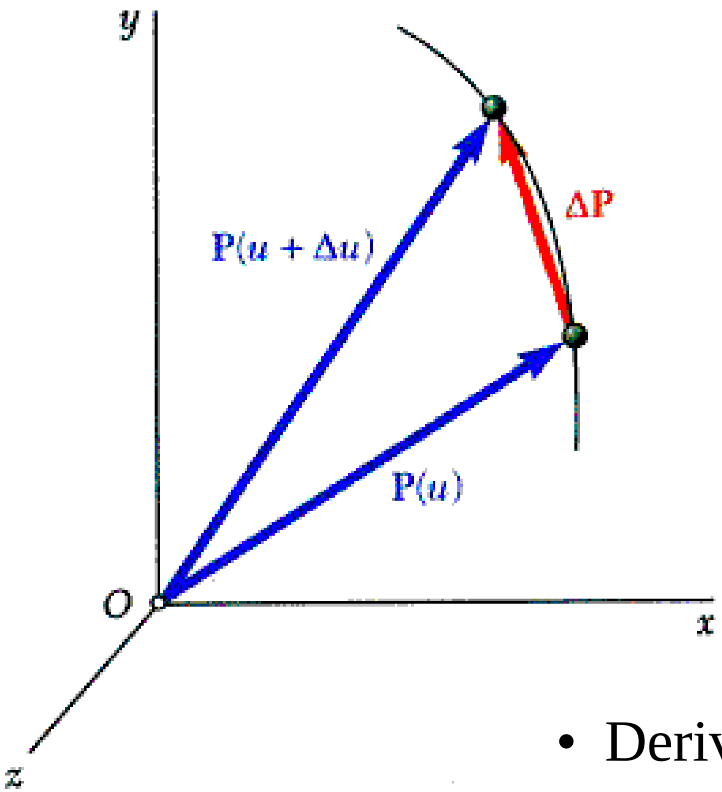
$$= \text{ acel. inst.}$$



- Em geral, a aceleração não é tangente à trajetória e à velocidade da partícula.

Derivadas de Funções Vetoriais

- Para uma função $\vec{P}(u)$ da variável escalar *u*, temos



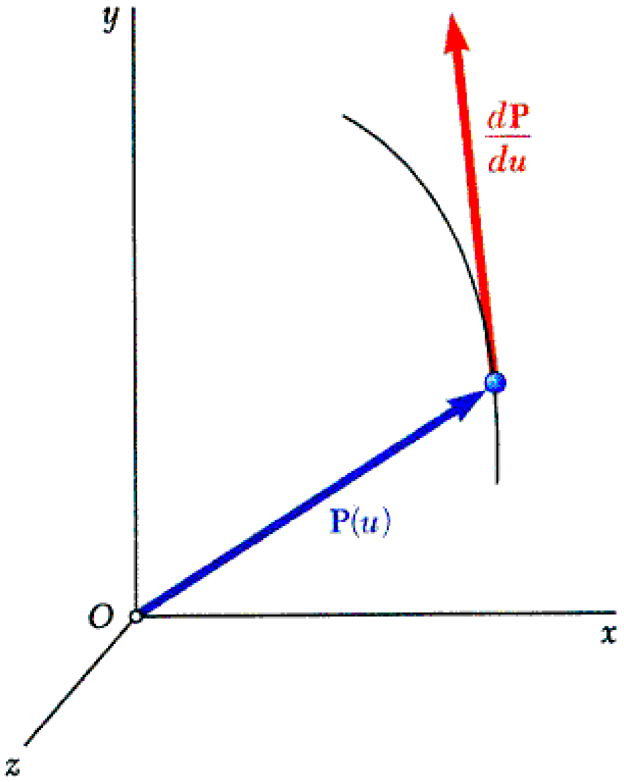
$$\frac{d\vec{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{P}(u+\Delta u) - \vec{P}(u)}{\Delta u}$$

- Derivada da soma de duas funções vetoriais:

$$\frac{d\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

Derivadas de Funções Vetoriais

- Derivada do produto de uma função escalar por uma função vetorial:



$$\frac{d\left(f\,\vec{P}\right)}{du} = \frac{df}{du}\vec{P} + f\,\frac{d\vec{P}}{du}$$

- Derivadas do *produto escalar* e do *produto vetorial*:

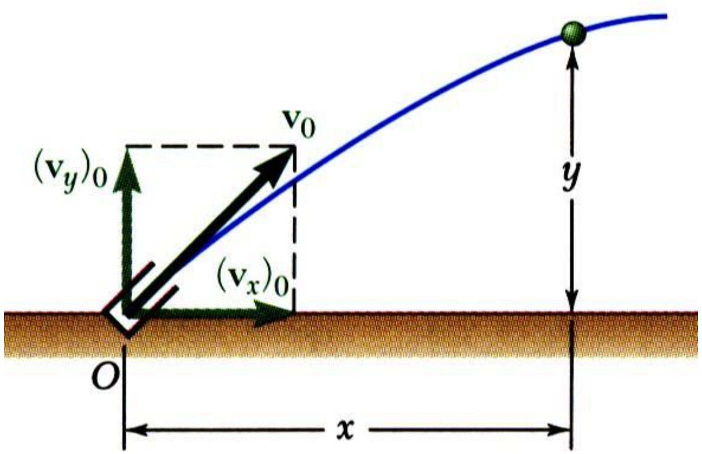
$$\frac{d\left(\vec{P}\bullet\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\bullet\vec{Q} + \vec{P}\bullet\frac{d\vec{Q}}{du}$$

$$\frac{d\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{du}$$

Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração

- O uso de componentes retangulares é particularmente eficaz quando os componentes da aceleração podem ser integrados independentemente como, por exemplo, no movimento de um projétil, para o qual temos,

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$



Com as condições iniciais

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \qquad (v_z)_0 = 0$$

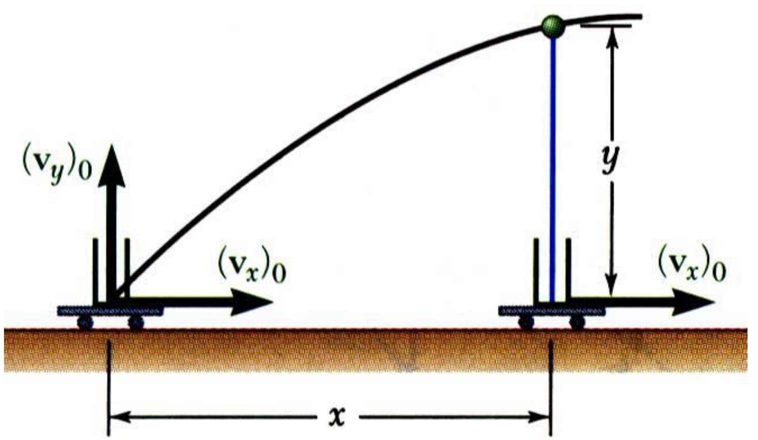
Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração

integrando duas vezes obtemos,

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = 0$$

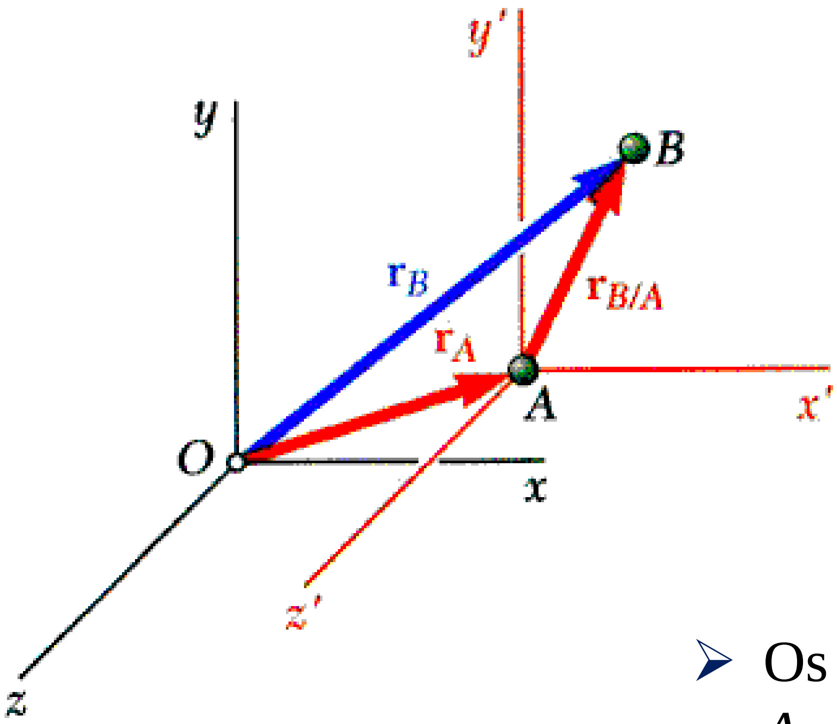
$$x = (v_x)_0 t \qquad y = (v_y)_0 y - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad z = 0$$

- O movimento na direção horizontal é uniforme.
- O movimento na direção vertical é uniformemente acelerado.
- O movimento do projétil pode ser substituído por dois movimentos retilíneos independentes.



Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação

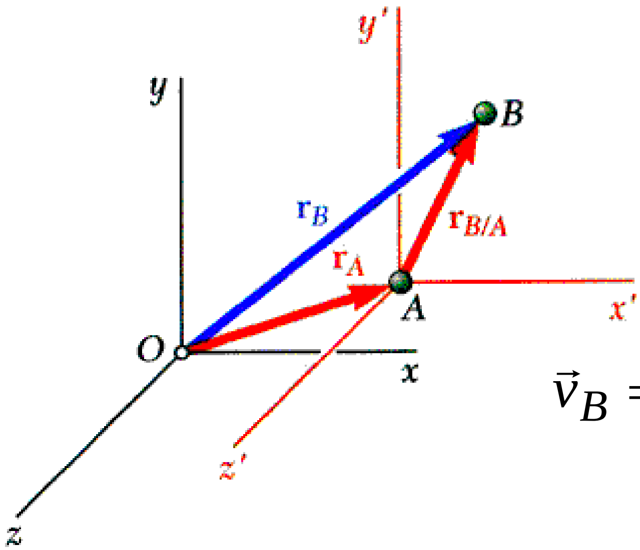
- Designemos um sistema de referência como o *sistema de referência fixo*. Todos os demais sistemas não ligados rigidamente a ele são *sistemas de referência móveis.*



- Os vetores de posição para as partículas *A* e *B* em relação ao sistema de referência fixo *Oxyz* são $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$.

Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação

- O vetor $\vec{r}_{B/A}$ que une A a B define a posição de B em relação ao sistema móvel $Ax'y'z'$ e $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$



- Derivando duas vezes obtemos,

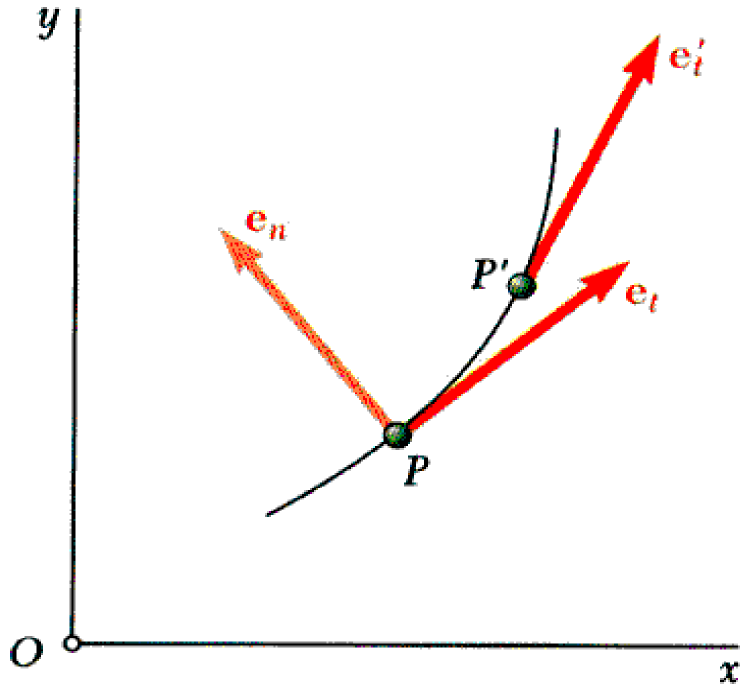
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\quad \vec{v}_{B/A} =$ velocidade de B em relação ao referencial A.

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ $\quad \vec{a}_{B/A} =$ aceleração de B em relação ao referencial A.

- O movimento absoluto de B pode ser obtido pela combinação do movimento de A e do movimento relativo de B em relação ao referencial móvel preso em A.

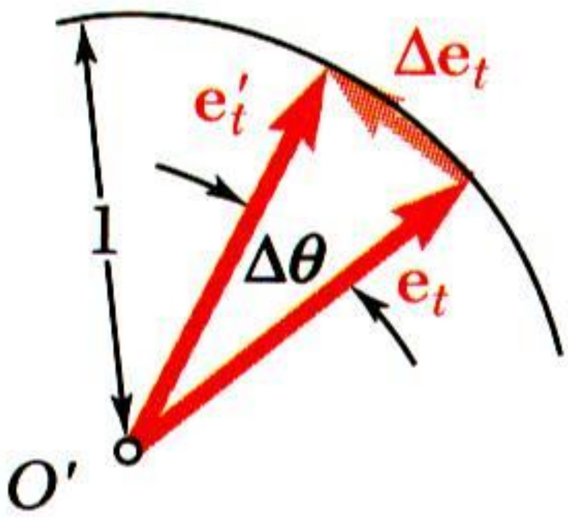
Componentes Tangencial e Normal

- O vetor velocidade de uma partícula é tangente à sua trajetória, mas, em geral, a aceleração não é tangente a essa trajetória. Deseja-se então, expressar a aceleração da partícula em termos de componentes tangencial e normal à trajetória.



Componentes Tangencial e Normal

- Na figura, $\vec{e}_t$ e $\vec{e}_t'$ são vetores unitários tangentes à trajetória da partícula em *P* e *P'*. Quando ambos são traçados a partir da mesma origem, $\Delta\vec{e}_t = \vec{e}_t' - \vec{e}_t$ e $\Delta\theta$ é o ângulo entre eles. Encontramos que a intensidade de $\Delta\vec{e}_t$ é:



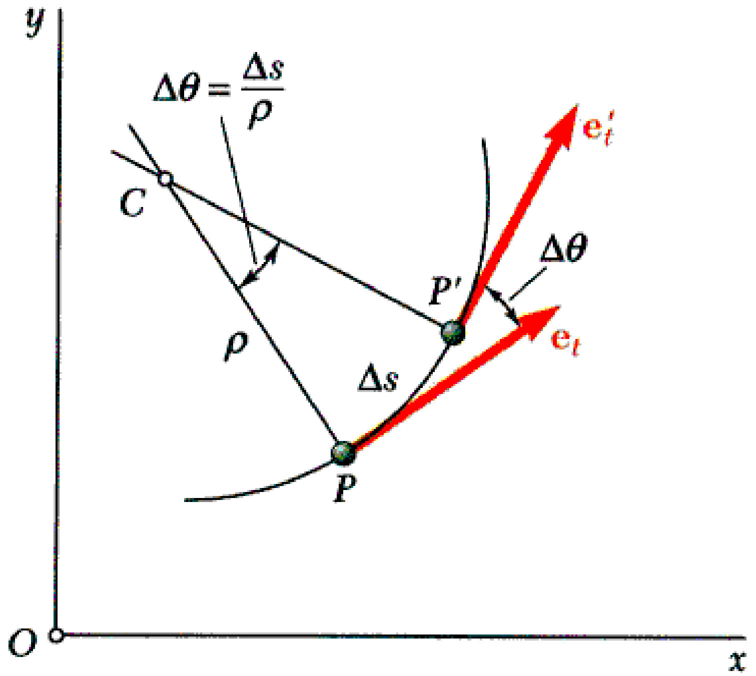
$$\Delta e_t = 2\,\text{sen}\left(\Delta\theta/2\right)$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\text{sen}\left(\Delta\theta/2\right)}{\Delta\theta/2}\vec{e}_n = \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}$$

Componentes Tangencial e Normal

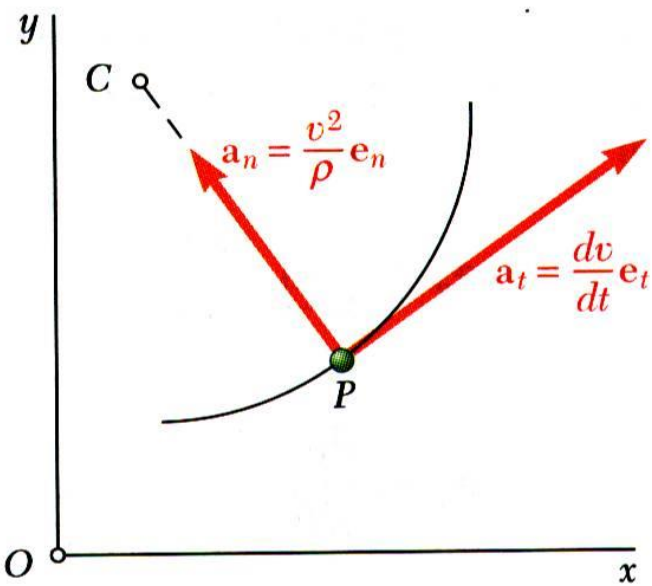
- Com o vetor velocidade expresso como $\vec{v} = v\vec{e}_t$, a aceleração da partícula pode ser escrita como:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Componentes Tangencial e Normal

Após as substituições temos,



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

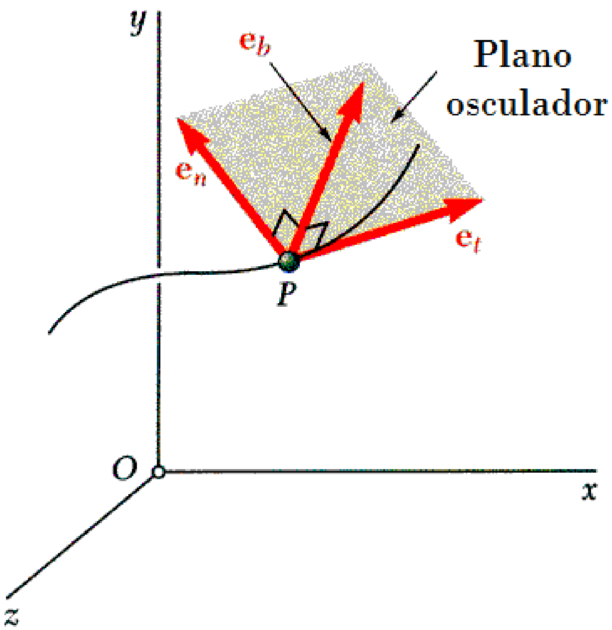
- O componente tangencial da aceleração reflete a variação na intensidade do vetor velocidade e o componente normal reflete as mudanças em sua direção.

- O componente tangencial pode ser positivo ou negativo. O componente normal sempre aponta para o centro da curvatura da trajetória.

Componentes Tangencial e Normal

- As relações para as acelerações normal e tangencial também são válidas para uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



- O plano que contém os vetores unitários tangencial e normal é chamado *plano osculador*.

- A Normal ao plano osculador é obtida a partir da relação

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

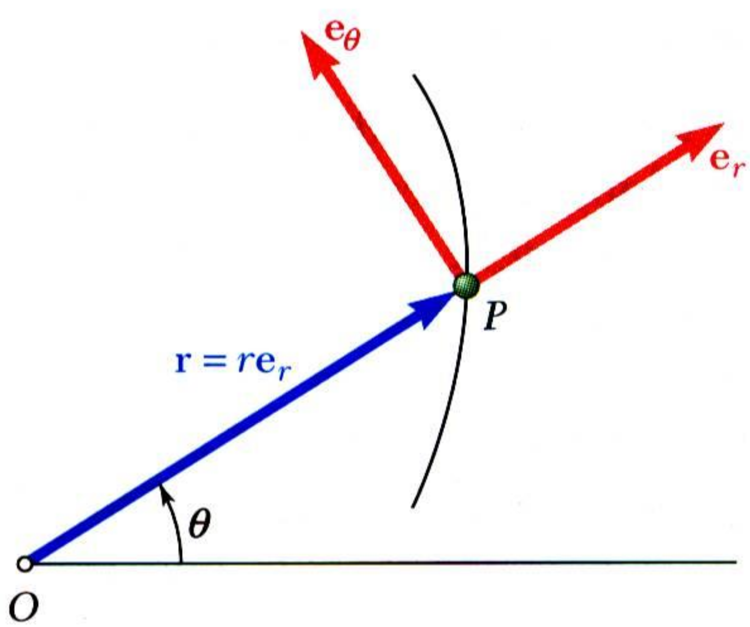
$$\vec{e}_n = normal\ principal$$

$$\vec{e}_b = binormal$$

- A aceleração não tem nenhum componente ao longo da binormal.

Componentes Radial e Transversal

- Quando a posição de uma partícula é dada em coordenadas polares, é conveniente decompor a velocidade e a aceleração em componentes paralelo e perpendicular à linha *OP*.



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

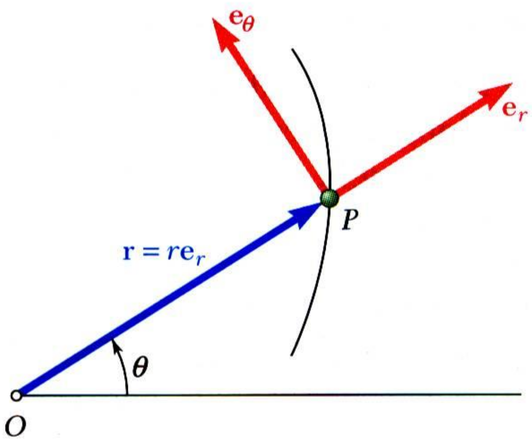
$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

Componentes Radial e Transversal

- Nesse caso, o vetor velocidade da partícula é



$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

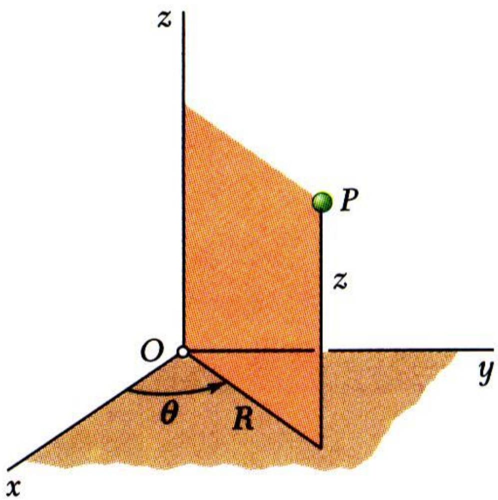
- De maneira análoga, a aceleração da partícula é

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

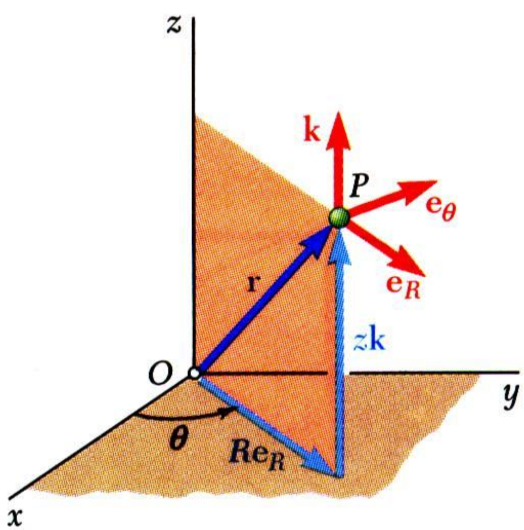
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

Componentes Radial e Transversal



- Quando a posição de uma partícula é dada em coordenadas cilíndricas, é conveniente expressar sua velocidade e sua aceleração utilizando os vetores unitários $\vec{e}_R, \vec{e}_\theta$ e $\vec{k}$.

- Verificamos que, nesse caso, o vetor de posição é: $\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{k}$



- O vetor velocidade é:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

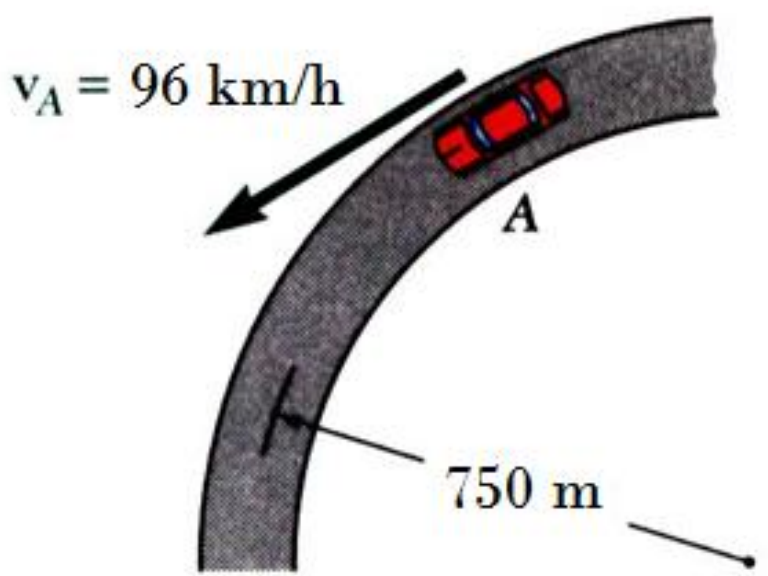
- E o vetor aceleração é:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_R + \left(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

Exemplo 5

Um motorista está percorrendo uma seção curva de rodovia a 96 km/h. Ele, então, aciona os freios impondo ao carro uma taxa de desaceleração constante.

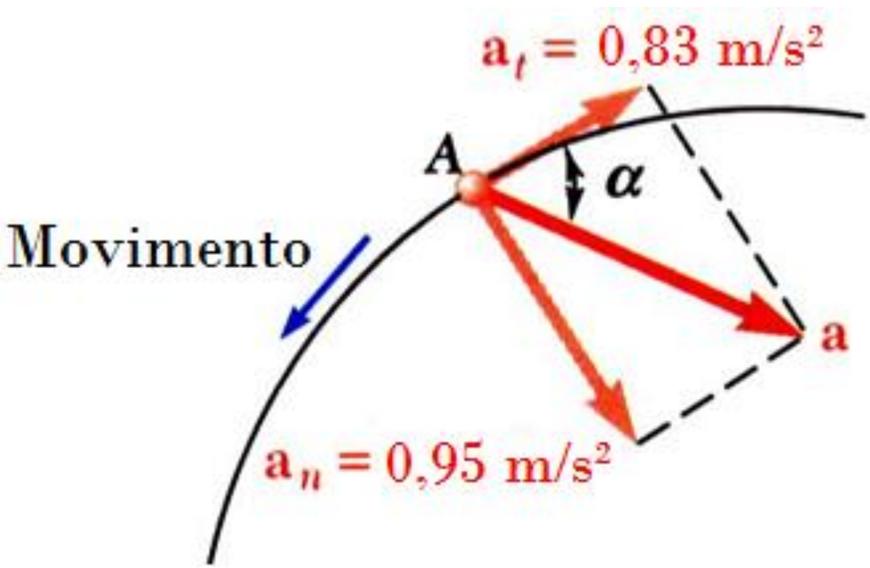
Sabendo que após 8 s a velocidade escalar for reduzida para 72 km/h, determine a aceleração do automóvel imediatamente após os freios terem sido acionados.



Exemplo 5

SOLUÇÃO:

- Calculamos os componentes tangencial e normal da aceleração.
- Determinamos a intensidade e a direção da aceleração.



$$96\,\text{km/h} = 26{,}67\,\text{m/s}$$

$$72\,\text{km/h} = 20\,\text{m/s}$$

Exemplo 5

- Calculamos os componentes tangencial e normal da aceleração.

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(20 - 26{,}67)\,\mathrm{m/s}}{8\,\mathrm{s}} = -0{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(26{,}67\,\mathrm{m/s})^2}{750\,\mathrm{m}} = 0{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- Determinamos a intensidade e a direção da aceleração.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-0{,}83)^2 + 0{,}95^2}$$

$$\boxed{a = 1{,}26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

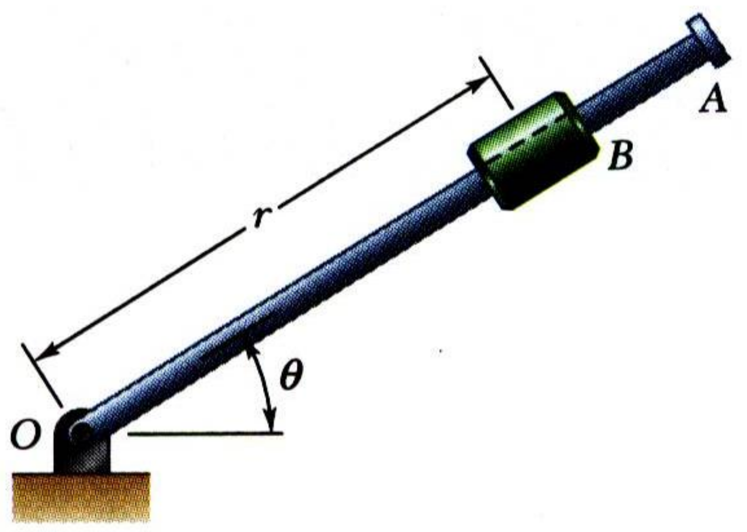
$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{0{,}95}{0{,}83}$$

$$\boxed{\alpha = 48{,}9^\circ}$$

Exemplo 6

O rotação do braço *OA* em torno de *O* é definida pela relação $\theta = 0{,}15t^2$, onde θ está em radianos e *t* em segundos. O Cursor B desliza ao longo do braço de tal maneira que sua distância em relação a *O é r* = $0{,}9 - 0{,}12t^2$, onde *r* é expresso em metros.

Após o braço ter girado 30º, determine *(a)* a velocidade total do cursor, *(b)* a aceleração total do cursor e *(c)* a aceleração relativa do cursor em relação ao braço.



Exemplo 5

SOLUÇÃO:

- Determinamos o tempo t para o qual $\theta = 30^o$.
- Determinamos os valores de r e θ, e de suas primeiras e segundas derivadas no instante t.
- Calculamos a velocidade e a aceleração em coordenadas cilíndricas.
- Determinamos a aceleração do cursor em relação ao braço.

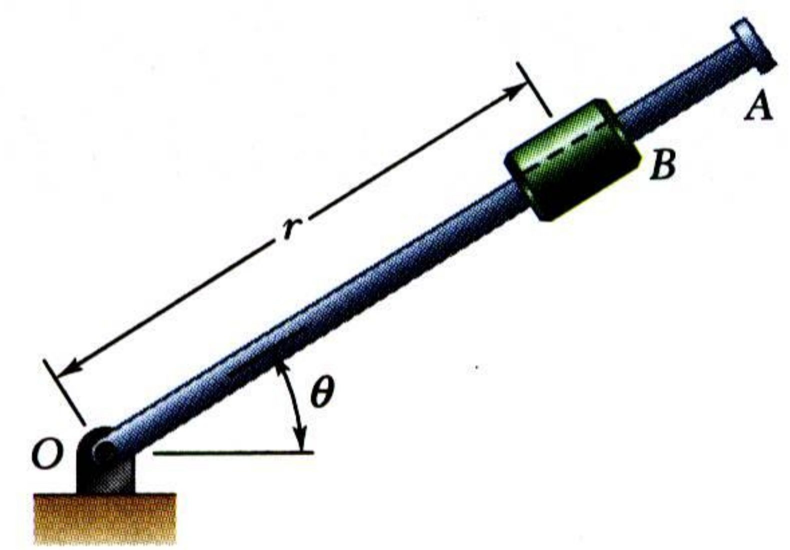
Exemplo 5

- Calculamos o tempo t para o qual $\theta = 30^o$.

$$\theta = 0{,}15t^2$$
$$= 30° = 0{,}524\,\text{rad} \qquad t = 1{,}869\,\text{s}$$

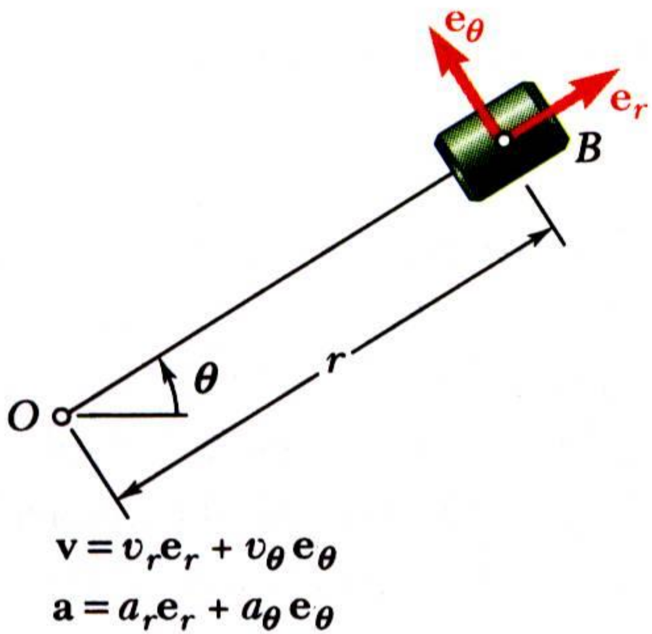
- Determinamos os valores de r e θ, e de suas primeiras e segundas derivadas no instante t

$$r = 0{,}9 - 0{,}12t^2 = 0{,}481\,\text{m}$$
$$\dot{r} = -0{,}24t = -0{,}449\,\text{m/s}$$
$$\ddot{r} = -0{,}240\,\text{m/s}^2$$



$$\theta = 0{,}15t^2 = 0{,}524\,\text{rad}$$
$$\dot{\theta} = 0{,}30t = 0{,}561\,\text{rad/s}$$
$$\ddot{\theta} = 0{,}300\,\text{rad/s}^2$$

Exemplo 5



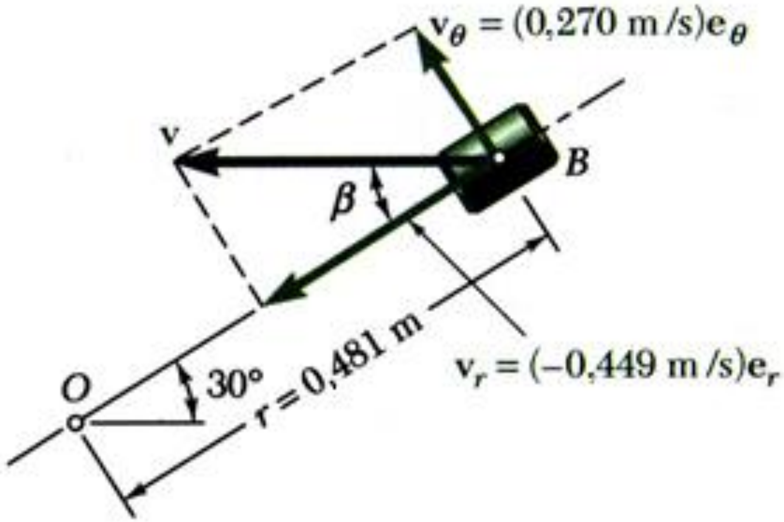
- Calculamos a velocidade e a aceleração.

$$v_r = \dot{r} = -0{,}449\,\mathrm{m}/s$$

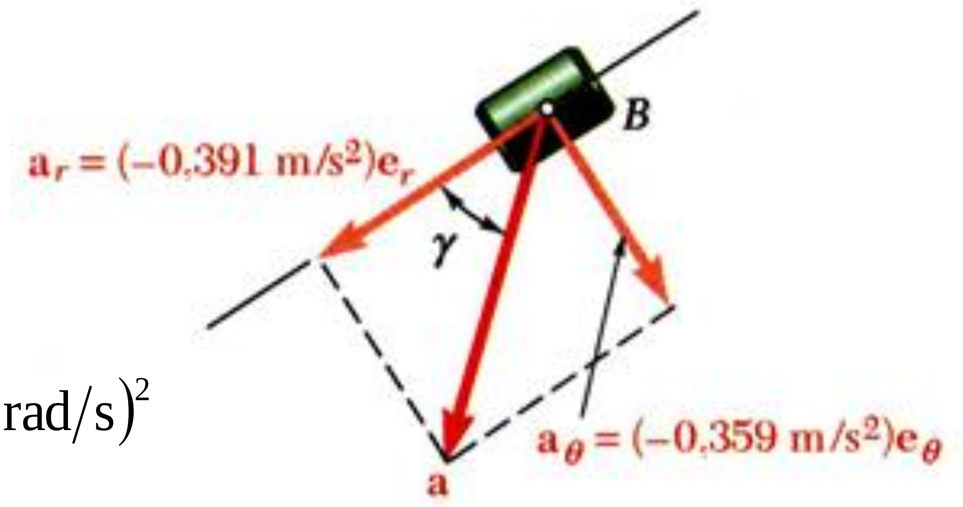
$$v_\theta = r\dot{\theta} = (0{,}481\,\mathrm{m})(0{,}561\,\mathrm{rad/s}) = 0{,}270\,\mathrm{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \qquad \beta = \arctan\frac{v_\theta}{v_r}$$

$$\boxed{v = 0{,}524\,\mathrm{m/s} \qquad \beta = 31{,}0°}$$



Exemplo 5



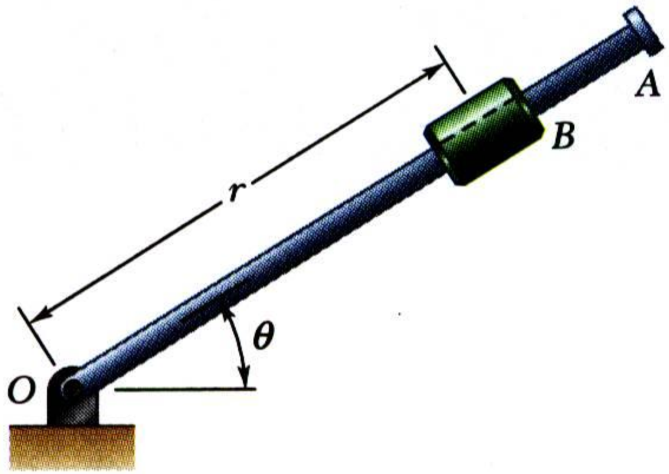
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$= -0{,}240\,\mathrm{m/s^2} - (0{,}481\,\mathrm{m})(0{,}561\,\mathrm{rad/s})^2$$
$$= -0{,}391\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$= (0{,}481\,\mathrm{m})(0{,}300\,\mathrm{rad/s^2}) + 2(-0{,}449\,\mathrm{m/s})(0{,}561\,\mathrm{rad/s})$$
$$= -0{,}359\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \qquad \gamma = \arctan\frac{a_\theta}{a_r}$$

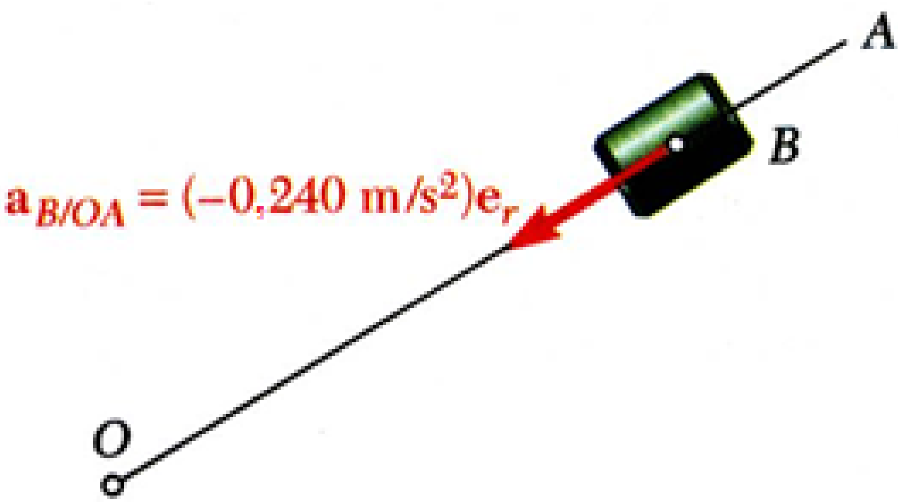
$$\boxed{a = 0{,}531\,\mathrm{m/s} \qquad \gamma = 42{,}6^\circ}$$

Exemplo 5



- Determinamos a aceleração do cursor em relação ao braço.

  O movimento do cursor em relação ao braço é retilíneo e definido pela coordenada *r*.



$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0{,}240\,\text{m/s}^2$$