Mecânica Analítica

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
Campus CAVG

PRONECIM
Programa Núcleo de Estudos em Ciências e Matemática

Dinâmica Hamiltoniana

Licenciatura em Física

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Princípio de Hamilton

O caminho real que uma partícula percorre entre dois pontos 1 e 2 em um dado intervalo de tempo, de t_1 a t_2, é tal que a integral de ação

$$S = \int_{t_1}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

é estacionária, quando considerada ao longo do caminho real.

- **O movimento executado por um sistema mecânico é aquele que minimiza a ação.**
- **Todas as leis físicas podem ser expressas num principio variacional.**

Princípio de Hamilton

- Um caminho de uma partícula é determinado pela 2º lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$.

- O caminho é determinado pelas três equações de Lagrange, pelo menos em coordenadas cartesianas. $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)$ e $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)$.

- O caminho é determinado pelo princípio de Hamilton.

Princípio de Hamilton

De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potenciais.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = 0$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)dt = 0$$

Momentos generalizados (canônicos)

Para qualquer sistema holonômico, a segunda lei de Newton é equivalente a n **equações de Lagrange**

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \quad [i = 1, \dots, n]$$

e as equações de Lagrange são, por sua vez, equivalentes ao princípio de Hamilton.

Se $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$ $\quad logo, \quad$ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$

Conclui-se que $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = CTE$

Momentos generalizados (canônicos)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = CTE \quad \rightarrow \quad \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i = p_i = CTE$$

Isto ocorre quando o sistema é conservativo e a energia potencial ***V*** depende somente das coordenadas generalizadas.

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Escrevendo em termos do lagrangeano $L = T - V$, temos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Momentos generalizados (canônicos)

Resumidamente, podemos escrever que o i-ésimo **momento generalizado** p_i é definido pela derivada

$$\boldsymbol{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

Se $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, então dizemos que a coordenada q_i é **ignorável ou cíclica** (**sistema fechado**) e o momento correspondente é constante.

Se a lagrangiana de um sistema (não necessariamente fechado) é invariável em relação à translação em uma certa direção, então a quantidade de movimento linear $\vec{p}$ do sistema naquela direção é constante no tempo.

Momentos generalizados (canônicos)

Retomado a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \;\rightarrow \frac{d}{dt}(p_i) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Estas equações podem ser chamadas de equação de movimento de Lagrange

$$\boldsymbol{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \qquad\qquad \boldsymbol{\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

Equações de Hamilton

A descrição hamiltoniana envolve a substituição das variáveis $(q, \dot{q})$ por (q, p) em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função $H(q, p, t)$ em lugar da lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$para gerar a dinâmica. Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma *transformação de Legendre* (largamente utilizadas na termodinâmica), que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução da *função de Hamilton* ou, simplesmente *hamiltoniano* $H(q, p, t)$ definida por

$$\boldsymbol{H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)}$$

Equações de Hamilton

Se um sistema for conservativo, o *hamiltoniano* H pode ser interpretado como a energia total (cinética e potencial) do sistema.

$$\boldsymbol{H = T + V}$$

Considerando que $L = L(q, \dot{q}, t)$, temos

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Podemos escrever

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Equações de Hamilton

Tendo em conta que podemos escrever $p_i d\dot{q}_i = d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$, temos,

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \left(d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Como $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Podemos escrever

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Equações de Hamilton

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Por outro lado, como $H = H(q, p, t)$, podemos escrever

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Comparando as relações, temos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

e como subproduto,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Equações de movimento de Hamilton

As equações

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

são conhecidas como ***equações de movimento de Hamilton*** ou ***equações canônicas de Hamilton*** e formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem equivalentes ao sistema de n equações de segunda ordem de Lagrange. As quantidades (p, q) são chamadas ***variáveis canônicas*** e o espaço cartesiano de $2n$ dimensões cujos pontos são representados pelas $2n - uplas$ $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ é chamado de ***espaço de fase***.

Um ponto no espaço de fase define o estado do sistema (posições e velocidade das partículas) num dado instante.

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 1

Considere uma conta deslizando em um fio rígido reto e sem atrito, o qual está sobre o eixo *x*, conforme a figura. A conta tem massa *m* e está sujeita a uma força conservativa, com energia potencial V(*x*). Obtenha a Lagrangiana e a equação de Lagrange para o movimento. Determine a Hamiltoniana e as equações de Hamilton e compare os dois métodos.

Equações de movimento de Hamilton

Vamos considerar a coordenada generalizada *q* a coordenada *x*.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

A equação de Lagrange correspondente é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = 0 \;\; \rightarrow \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) \;\; \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad ou \quad -\frac{dV}{dx} = m\ddot{x}$$

que é justamente a equação de Newton, $F = ma$, como esperávamos.

Equações de movimento de Hamilton

Para obter o formalismo Hamiltoniano, devemos primeiramente encontrar o momento generalizado.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Como era esperado, esse é o momento convencional $p = mv$. Essa equação pode ser resolvida, resultando em $\dot{x} = \frac{p}{m}$, que pode ser substituída na Hamiltoniana, levando a

$$\mathrm{H} = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - V(x)\right] = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

onde

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

Equações de movimento de Hamilton

$$\mathrm{H} = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - V(x)\right] = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

A expressão da hamiltoniana corresponde a energia total.

As equações de Hamilton são

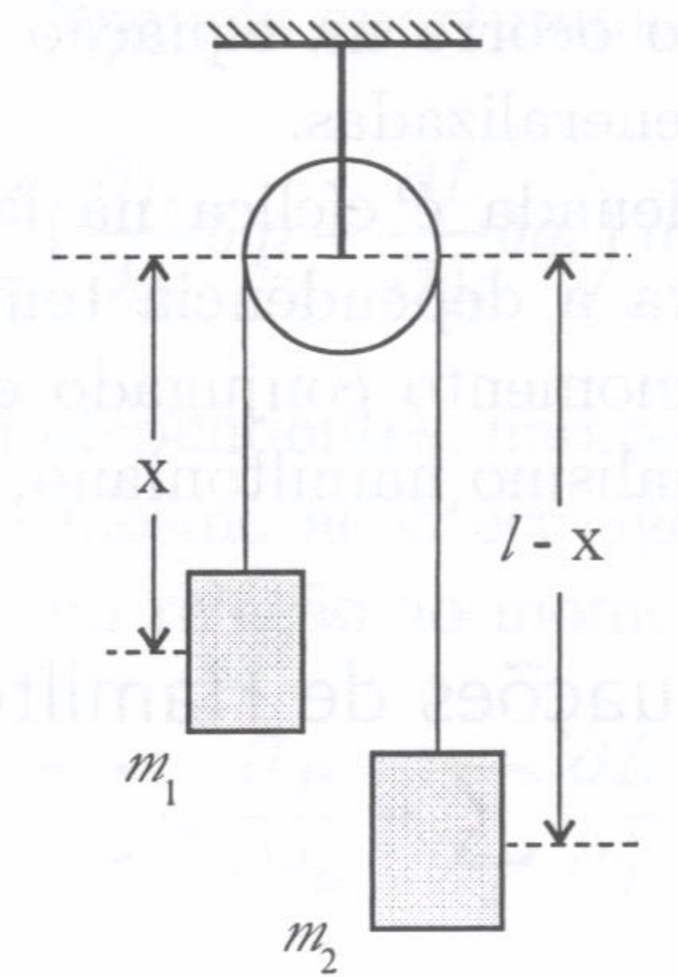
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad e \qquad \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}$$

A primeira dessas é, do ponto de vista Newtoniano, justamente a definição tradicional do momento e, quando substituímos essa definição na segunda equação, ela nos leva, outra vez, a $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$. Como tinha de ser para ocaso, Newton, Lagrange e Hamilton conduzem à mesma equação familiar. Neste exemplo simples, nem Lagrange nem Hamilton tem qualquer vantagem sobre Newton.

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 2

Considere a máquina de Atwood da figura.



Pelos dados da figura, temos

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l - x)$$

Desprezando o termo constante, temos

$$V = -m_1 g x + m_2 g x$$

$$L = T - V$$

Equações de movimento de Hamilton

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

A expressão do hamiltoniano é dada por

$$H = \dot{q}_i p_i - L = p\dot{x} - L$$

$$H = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

O hamiltoniano deve ser escrito apenas em termos de coordenadas e momentos, eliminando as velocidades.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

Equações de movimento de Hamilton

Substituindo a equação

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

no hamiltoniano

$$H = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

obtemos

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)^2} + (m_1 - m_2)gx$$

Equações de movimento de Hamilton

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)^2} + (m_1 - m_2)gx$$

Calculando as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

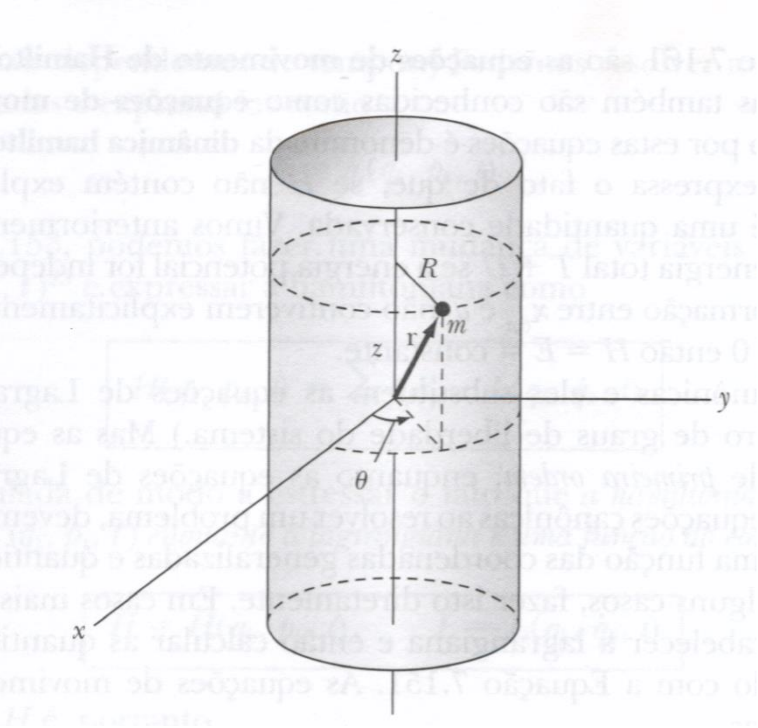
Combinando as duas expressões, obtemos a expressão para a aceleração com que as massas se deslocam

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 3

Utilizando o método hamiltoniano para encontrar as equações de movimento de uma partícula de massa m restringido para mover na superfície de um cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$. A partícula está sujeita à força direcionada diretamente à origem e é proporcional à distância da partícula da origem: $\vec{F} = -k\vec{r}$.



Equações de movimento de Hamilton

O potencial correspondente a força $\vec{F} = -k\vec{r}$ é

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

O quadrado da velocidade em coordenadas cilíndricas é

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

Neste caso, R é uma constante, então a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Podemos escrever, agora, a lagrangiana, como

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

Equações de movimento de Hamilton

As coordenadas generalizadas são θ e z, e as quantidades de movimento generalizadas são

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad e \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Neste caso a hamiltoniana é somente a energia total e como θ não ocorre explicitamente, temos

$$H(z, p_\theta, p_z) = T + V = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2$$

onde o termo constante $\frac{1}{2}kR^2$ foi suprimido.

Equações de movimento de Hamilton

$$H(z,p_\theta,p_z) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2$$

As equações de movimento são encontradas pelas equações canônicas

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

Equações de movimento de Hamilton

Observe que as equações de movimento generalizadas e as equações de movimento obtidas pelas equações canônicas levam aos mesmos resultados

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad e \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

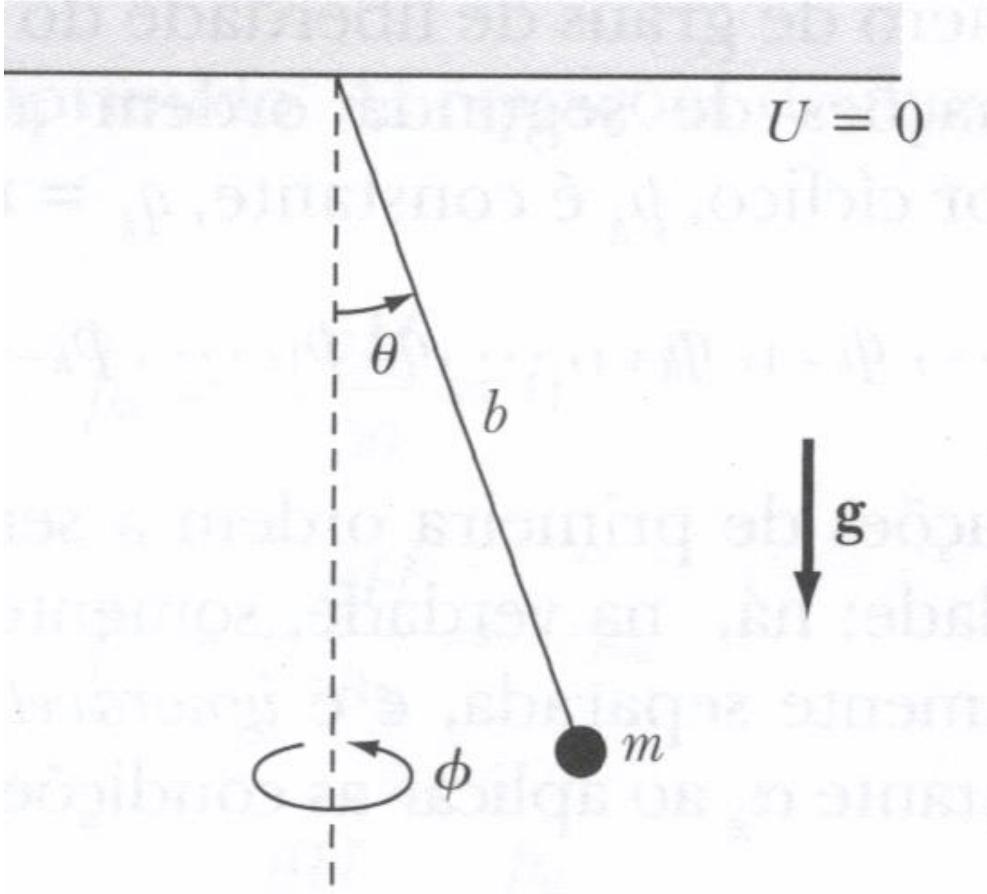
$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad e \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

Resulta que $\quad p_\theta = mR^2\dot{\theta} = constante$

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 4

Utilize o método de Hamilton para encontrar as equações do movimento para um pêndulo esférico de massa *m* e comprimento *b*.



Equações de movimento de Hamilton

As coordenadas generalizadas são θ e ϕ. A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2 sin^2\,\theta\dot{\phi}^2$$

A única força que age no pêndulo (além do ponto do suporte) é a gravidade, e definimos o potencial zero como estando no ponto de conexão do pêndulo.

$$V = -mgb\cos\theta$$

Podemos escrever, agora, a lagrangiana, como

$$L = T - V \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2 sin^2\,\theta\dot{\phi}^2 + mgb\cos\theta$$

As quantidades de movimento generalizadas são, então

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} \qquad e \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mb^2 sen^2\theta\dot{\phi}$$

Equações de movimento de Hamilton

Podemos determinar a hamiltoniana pela equação $H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$ ou por $H = T + V$

$$H = T + V = \frac{1}{2}mb^2\frac{p_\theta^2}{(mb^2)^2} + \frac{1}{2}\frac{mb^2 sen^2\theta p_\phi^2}{(mb^2 sen^2)^2} - mgb\cos\theta$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 sen^2\theta} - mgb\cos\theta$$

Equações de movimento de Hamilton

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 sen^2\theta} - mgb\cos\theta$$

As equações de movimento são

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2} \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mb^2 sen^2\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mb^2 sen^3\theta} - mgb\ sen\ \theta$$

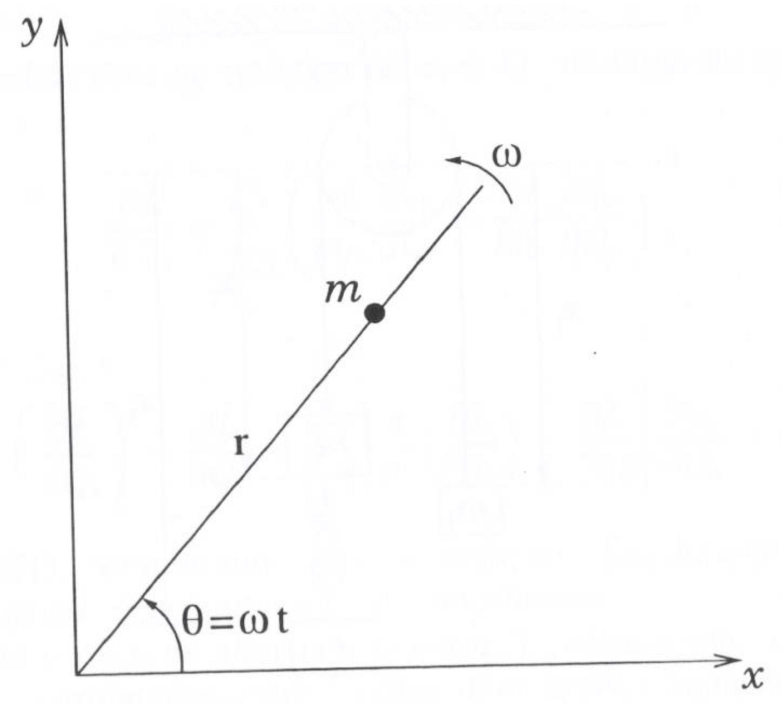
$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

Porque ϕ é cíclico, a quantidade de movimento p_ϕ sobre o eixo de simetria é constante.

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 5 – Reconsiderando o Exemplo 13 da parte 1.

Uma conta desliza ao longo de uma haste retilínea lisa que gira com velocidade angular constante num plano horizontal. Descreva seu movimento pelo formalismo de Lagrange, obtenha a hamiltoniana e estude a sua conservação, assim como a da energia.



Equações de movimento de Hamilton

Seja xy o plano horizontal que contém a haste e usemos as coordenadas polares para localizar a massa m. As varáveis r, θ não podem ser tomadas como coordenadas generalizadas porque θ é forçada a obedecer à restrição $\theta - \omega t = 0$, que é um vínculo holônomo da forma $f(q_1, \ldots, q_n, t) = 0$, onde ω é a velocidade angular da haste, suposta conhecida. O sistema possui somente um grau de liberdade (movimento radial) e podemos escolher $q_1 = r$ como coordenada generalizada. A energia cinética pode ser escrita na forma

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$$

Onde usamos $\dot{\theta} = \omega$.

Equações de movimento de Hamilton

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano do movimento, a lagrangiana do sistema se reduz à energia cinética:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

Dispondo da lagrangiana expressa exclusivamente em função de r e $\dot{r}$, a equação de movimento do sistema é imediatamente obtida:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\omega^2 r = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = \omega^2 r$$

Conclui-se que a conta tende a se afastar do eixo de rotação em consequência da “força centrifuga”, que é o resultado bem conhecido.

Equações de movimento de Hamilton

Como a lagrangiana do sistema é $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$

que coincide com a energia cinética da conta. Neste caso, $p_r = m\dot{r}$ e

$$H = T + V \quad \rightarrow \quad H = T = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

que ***não*** é a energia total (puramente cinética) da conta. Entretanto, H é constante de movimento porque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Por outro lado a energia total

$$E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

não se conserva porque a força de vínculo realiza trabalho por ocasião do deslocamento *real* da partícula.

Equações de movimento de Hamilton

H é a "energia total" do sistema de referência girante.

$$H = T + V \quad \rightarrow \quad H = T = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

- ***Também pode acontecer casos em que a H coincide com a energia total mas não se conserva devido a uma dependência temporal explicita (Goldstein 1980)***

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 6

Construa a lagrangiana e as equações de Hamilton para o oscilador harmônico unidimensional, com massa *m* e constante da força *k*.

A energia cinética é $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e a energia potencial é $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ se introduzimos a frequência natural $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

ou

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Equações de movimento de Hamilton

O momento generalizado é $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, podemos escrever a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

e a Hamiltoniana (escrita como função de *x* e *p*) é

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2$$

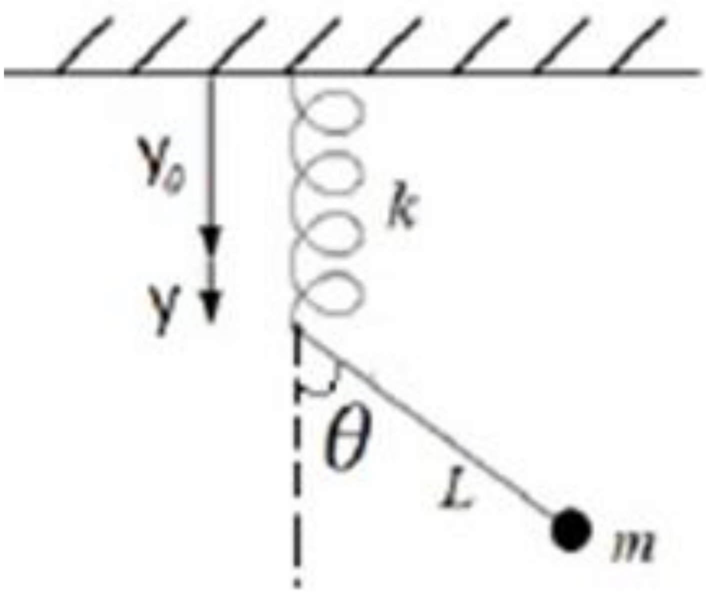
Logo, as equações de Hamilton são

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad e \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

Equações de movimento de Hamilton

Exemplo 7

Para o pêndulo de comprimento *L* que se move no plano vertical, vinculado a uma mola de constante elástica *k*, que se move somente no plano vertical, obtenha as equações de Hamilton para o movimento do sistema.



Equações de movimento de Hamilton

Para esse problema, vamos escolher as coordenadas generalizadas (y, θ), pois θ descreve o movimento da massa em relação ao ponto de apoio e *y* descreve a variação desse ponto de apoio, em relação ao teto, por exemplo, que vamos tomar como ponto de referencia. Com isso, podemos escrever a energia cinética e a energia potencial como:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) \qquad V = \frac{k}{2}(y - y_0)^2 - mg(y + L\cos\theta)$$

Assim, a Lagrangeana fica

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(y - y_0)^2 + mg(y + L\cos\theta)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \qquad e \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

Equações de movimento de Hamilton

Assim, a Hamiltoniana fica

$$\mathrm{H} = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{2}(y - y_0)^2 - mg(y + L\cos\theta)$$

$$H = \frac{{p_\theta}^2}{2mL^2} + \frac{{p_y}^2}{2m} + \frac{k}{2}(y - y_0)^2 - mg(y + L\cos\theta)$$

Logo, as equações de Hamilton são

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2} \qquad e \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgL\sin\theta$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \qquad e \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -k(y - y_0) + mg$$

Equações de movimento de Hamilton

Outra Solução: já conhecemos a Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(y - y_0)^2 + mg(y + L\cos\theta)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

A hamiltoniano definida por $\quad H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$

$$H = \frac{p_\theta}{mL^2}p_\theta + \frac{p_y}{m}p_y - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(y - y_0)^2 + mg(y + L\cos\theta)\right]$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(y - y_0)^2 - mg(y + L\cos\theta)$$

Equações de movimento de Hamilton

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(y - y_0)^2 - mg(y + L\cos\theta)$$

Logo, as equações de Hamilton são

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2} \qquad e \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgL\sin\theta$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \qquad e \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -k(y - y_0) + mg$$

Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Exemplo 8:

Determinar hamiltoniana de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo.

Como visto anteriormente, a lagrangeana da partícula é

$$\boxed{L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}}$$

e o momento canônico é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i(\vec{r},t) \quad , \qquad i = 1,2,3$$

$$\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

logo, a correspondente hamiltoniana é

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\phi - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} =$$
$$= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\phi = \frac{1}{2}(m\vec{v})^2 + e\phi$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) + e\phi}$$

Partícula Livre Relativística

Exemplo 9:

Determinar hamiltoniana de uma partícula livre relativística.

Como visto anteriormente, a lagrangeana da partícula é

$$\boxed{L = \alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Partícula Livre Relativística

e o momento canônico é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -mc^2 \frac{\partial}{\dot{x}_1}\left[1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j{}^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -mc^2 \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j{}^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(-2\dot{x}_i)}{c^2} \therefore$$

$$\therefore \; p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \rightarrow \qquad \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

$$i = 1, 2, 3$$

Partícula Livre Relativística

Logo, a energia desta partícula é identificada com a sua hamiltoniana (note que a lagrangiana desta partícula não depende explicitamente do tempo e, então, a sua hamiltoniana é uma constante de movimento). Temos:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \qquad \boxed{H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$